

# **Stochastische Bevölkerungsprognose für West- und Ostdeutschland**

Oliver Lipps und Frank Betz

**41-2003**

December 2003

# **Stochastische Bevölkerungsprognose für West- und Ostdeutschland**

Dr.-Ing. Oliver Lipps  
Frank Betz  
Mannheimer Forschungsinstitut Ökonomie und demographischer Wandel (mea)  
Universität Mannheim  
L 13,17  
D – 68131 Mannheim

lipps@mea.uni-mannheim.de

0. Abstract .....	2
1. Motivation .....	2
2. Deterministische vs. Stochastische Prognose.....	3
2.1 Deterministischer Ansatz .....	3
2.2 Stochastischer Ansatz.....	4
3. Datenlage.....	6
3.1 Quellen .....	6
3.2 Fertilität .....	7
3.2.1. Westdeutschland.....	8
3.2.2. Ostdeutschland .....	9
3.3 Mortalität.....	11
3.4 Migration.....	13
4. Modellierung .....	14
4.1 Geburtenrate Westdeutschland.....	14
4.1.1 Prognose des mittleren Alters von Müttern bei Geburt.....	17
4.1.2 Prognose der Varianz des Alters von Müttern bei Geburt .....	18
4.1.3 Prognose der totalen Fertilitätsrate.....	20
4.2 Geburtenrate Ostdeutschland .....	22
4.3 Mortalität Westdeutschland.....	25
4.4 Mortalität Ostdeutschland .....	28
4.4.1 Frauen.....	28
4.4.2 Männer .....	29
4.5 Migration.....	30
4.6 Sollten Zufallswerte für West- und Ostdeutschland gemeinsam verwendet werden ? ..	31
5. Resultate der stochastischen Bevölkerungsschätzung.....	32
5.1 Entwicklung des Jugendlastquotienten .....	33
5.2 Entwicklung des Alterslastquotienten.....	35
5.3 Entwicklung der Totalen Abhängigkeitsrate.....	36
6. Ausblick .....	37
Literatur.....	38

Die Autoren danken den Förderern des mea für die Unterstützung bei der Erstellung dieses Beitrags. Hierbei ist vor allem der Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV), das Land Baden-Württemberg, und die Fakultät für Volkswirtschaftslehre an der Universität Mannheim zu nennen.

## 0. Abstract

Üblicherweise werden Unsicherheiten bei Bevölkerungsprognosen mit Hilfe der Szenarientechnik abgebildet. Unter Annahme von begründeten Szenarienparametern, die eine gewisse Bandbreite von zukünftig zu erwartenden demographischen Raten (Geburten- und Sterberaten, Nettomigration) abdecken, werden demographische Größen (etwa Gesamtbevölkerung) durch Fortschreibung aktueller Werte mit Hilfe dieser Szenarienparameter gewonnen. Diese Technik birgt – gerade in der aktuellen Diskussion um die Finanzierungsmöglichkeiten der sozialen Sicherungssysteme – erhebliche Probleme. Da in einem deterministischen Modell die prognostizierte Bevölkerung nur von der Bevölkerung im Ausgangsjahr und den Annahmen über die Entwicklung der demographischen Raten abhängt, ist dieses Verfahren tendenziell größerer Subjektivität unterworfen. Damit sind jedoch auch die Ergebnisse leichter angreifbar.

In diesem Papier wird eine stochastische Bevölkerungsprognose erstellt, die weitgehend frei von subjektiven Annahmen ist. Vorausgesetzt wird lediglich die strukturelle Konstanz der in den betrachteten vergangenen Zeiträumen gültigen Entwicklungen, die in die Zukunft fortgeschrieben werden. Die betrachteten historischen Zeiträume sind dementsprechend so gewählt, dass in ihnen selbst keine strukturellen Brüche – wie z.B. politische Umbrüche, Epidemien, Babyboom und –bust, etc., aufgetreten sind.

Der Vorteil dieses Ansatzes gegenüber der Szenarientechnik liegt darin, dass keine a priori Annahmen über zukünftige Entwicklungen getroffen werden. Es muss allerdings darüber entschieden werden, wie die Parametrisierung des Prognosemodells gewählt wird und – in Abhängigkeit vom Ausmaß der betrachteten historischen Strukturkonstanz - ab wann die Zeitreihe in die Berechnung einbezogen wird.

Als Ergebnis resultieren anstelle von einigen Einzelwerten ganze Wahrscheinlichkeitsbereiche von Populationsparametern. Auch wenn die Prognose im Zeitverlauf zunehmend unsicher wird, verdeutlichen die Resultate, dass der stark unsichere Bereich der Vorhersage erst in einer Zeit beginnt, die noch relativ weit in der Zukunft liegt

## 1. Motivation

Derzeit wird die zukünftige Finanzierung der Renten- und Krankenversicherungen besonders in Deutschland vor dem Hintergrund des demographischen Wandels kontrovers diskutiert (Kommission zur Nachhaltigkeit in der Finanzierung der sozialen Sicherungssysteme 2003). Aber auch in anderen europäischen Ländern stehen Maßnahmen zur Lösung der sich abzeichnenden Finanzierungsprobleme an (Bertelsmann Stiftung 2003). Dabei spielen neben eher kurzfristigen konjunkturellen Problemen vor allem langfristig strukturelle Veränderungen die ausschlaggebende Rolle. Denn die Alterung der Gesellschaften in Deutschland und weiten Teilen der entwickelten Welt wird zu tiefgreifenden ökonomischen und sozialen Konsequenzen führen.

Betroffene ökonomische Größen sind Arbeitsnachfrage und –angebot (Berkel und Börsch-Supan 2003, Börsch-Supan 2003), sowie die Konsumnachfrage, die sich sowohl in quantitativer als auch in qualitativer Hinsicht stark verändern werden. Aber auch die internationalen Waren- und Kapitalströme werden starken Veränderungen unterliegen. Entscheidend ist, dass – falls kein Wohlstandsverlust eintreffen soll - der gleiche Wohlstand von immer weniger Erwerbstätigen generiert werden muss, was nur mit entsprechend erhöhter Produktivität und Kapitalintensität zu leisten ist.

Ziel dieser Studie ist, die in Deutschland zukünftig zu erwartende demographische Entwicklung als Entscheidungsgrundlage stochastisch zu prognostizieren. Das Ziel besteht darin, Aussagen über den zu erwartenden Druck auf die Sozialsysteme zu erhalten bzw. in einem weiteren Schritt ganze Bandbreiten von Auswirkungen potentieller Politikmaßnahmen abschätzen zu können.

## **2. Deterministische vs. Stochastische Prognose**

### **2.1 Deterministischer Ansatz**

Traditionell beruhen demographische Prognosen auf deterministischen Modellen die ohne Unsicherheit operieren. Solche Modelle führen aufgrund von demographischen Größen, die der Forscher vorgibt, über einen funktionalen Zusammenhang zu einer entsprechenden Bevölkerungsentwicklung. In der Regel werden drei Varianten durchgerechnet, denen unterschiedliche Annahmen zugrunde liegen; eine „geringe“, eine mittlere- und eine „hohe“ Annahme der relevanten Größe. So sehen die Vereinten Nationen (UN 2002) die Fertilitätsrate Deutschlands im Jahr 2030 auf einem Niveau von 1,6 mit einem „wahrscheinlichen“ Bereich zwischen 1,3 und 2,0. Diese Methode wird von den offiziellen Stellen seit Jahrzehnten praktiziert, weist jedoch eine Reihe von Problemen auf, die wir kurz erörtern werden. Eine ausführliche methodologische Diskussion findet sich bei Lee (1998).

Erstens können den untersuchten Varianten keine Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. So erwartet das Statistische Bundesamt für das Jahr 2050 einen Alterslastquotienten, d.h. eine Relation von potentiellen Rentnern, d.h. Personen über 59 Jahren zu potentiellen Erwerbstätigen, d.h. Personen zwischen 20 und 59 Jahren zwischen 71% in der Variante „relativ junge“ Bevölkerung und von 88% für die Variante „relativ alte“ Bevölkerung (Statistisches Bundesamt 2003). Diese Information wird manchen Nutzern der Bevölkerungsprognose genügen. Ein stochastischer Ansatz ist jedoch darüber hinaus in der Lage anzugeben, ob das entsprechende Intervall mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% oder 90% eintreten wird, was gerade für die Politikberatung eine wertvolle Zusatzinformation darstellt.

Zweitens ist es für die Szenariotechnik schwer, Unsicherheit konsistent abzubilden. Um die Bandbreite der zukünftigen Bevölkerungszahl darzustellen, kombiniert man einerseits eine niedrige Lebenserwartung mit einem niedrigen Wanderungssaldo, andererseits eine hohe Lebenserwartung mit einem hohen Wanderungssaldo. Dies führt in der Prognose des Statistischen Bundesamtes (2003) im Jahr 2050 zu einer Gesamtbevölkerung zwischen 67 Millionen und 81 Millionen. Konstruiert man die Annahmen dahin, die Unsicherheit der Bevölkerungszahl zu erfassen, untertreibt man systematisch die Unsicherheit in Bezug auf andere Größen wie den Alterlastquotienten. Denn obwohl im einen Szenario 18 Millionen Menschen mehr in Deutschland leben, differieren die Alterslastquotienten mit 81 im Szenario mit der niedrigsten Bevölkerung und 77 im Szenario mit der höchsten Bevölkerung weit weniger. Ein Szenario mit geringer Geburtenrate kann am Ende eines ausreichend langen Prognosehorizonts zu einem ähnlichen Alterslastquotienten wie beim Szenario mit hoher Geburtenrate führen, da zwischenzeitlich auch die am Anfang des Prognosezeitraums geborenen alt geworden sind.

Um die Unsicherheit bezüglich des Alterslastquotienten herauszuarbeiten, werden zwei weitere Varianten berechnet, in denen die Lebenserwartung niedrig und der Wanderungssaldo hoch, beziehungsweise die Lebenserwartung hoch und der Wanderungssaldo niedrig ist. Es

ergibt sich in der Variante „relativ junge“ Bevölkerung der Alterslastquotient von 71 und für die „relativ alte“ Bevölkerung der Alterslastquotient von 88 (Statistisches Bundesamt 2003). Diese Kombination der Annahmen muss jedoch wiederum die Bandbreite der zu erwartenden Bevölkerungszahl untertreiben.

Die Produzenten deterministischer Prognosen versuchen dieser Schwäche dadurch Rechnung zu tragen, dass sie verschiedene Varianten anbieten, um die Unsicherheit in Bezug auf mehrere Größe herauszuarbeiten. Fraglich bleibt dabei allerdings, ob die gesamte Bandbreite aller potentiell interessierenden Ausgangsparameter abgedeckt werden kann. Ein stochastischer Ansatz ermöglicht es, alle diese Aussagen aus einem Modell in ihrer Gesamtheit abzuleiten.

Es zeigt sich, dass extreme Varianten der Eingangsgrößen nicht notwendig in den gesamten Bandbreiten der Ausgangsgrößen resultieren. Ursache dafür sind unrealistische Annahmen über die zeitliche Korrelation der demographischen Raten und die Korrelation zwischen den Komponenten der Bevölkerungsentwicklung. Deterministische Prognosen unterstellen eine perfekte serielle Korrelation der demographischen Raten. So beträgt die Fertilitätsrate in der mittleren UN Variante 1,6 in jedem Jahr des Prognosezeitraums. Auch wenn Fertilitätsraten ein hohes Maß an Autokorrelation aufweisen, können sie im Lauf eines Jahrzehnts beträchtlich schwanken, was insgesamt zu erheblich höheren Bandbreiten in den Ausgangsvariablen wie dem Alterslastquotienten führt.

Darüber hinaus wird eine perfekte Korrelation auch der Komponenten der Bevölkerungsentwicklung angenommen. Möchte man eine „relativ junge“ Bevölkerung konstruieren, muss eine niedrige Lebenserwartung dauerhaft von hoher Fertilität und einem hohen Wanderungssaldo begleitet werden. Zwischen den Komponenten der Bevölkerungsentwicklung ist jedoch nur bedingt ein inhaltlicher Zusammenhang zu sehen, da Mortalität, Fertilität und Migration von unterschiedlichen Faktoren beeinflusst werden.

## **2.2 Stochastischer Ansatz**

Vor diesem Hintergrund sind in den letzten Jahren alternative Methoden entwickelt worden, die es erlauben, die zukünftige Bevölkerungsentwicklung stochastisch zu prognostizieren. Auf diese Weise generiert man Wahrscheinlichkeitsverteilungen der demographischen Variablen, die es erlauben, Konfidenzintervalle zu konstruieren.

In stochastischen Bevölkerungsprognosen pflanzen sich Prognosefehler durch die Zeit fort. Diese Fehler können sich im Zeitverlauf verstärken, aber auch teilweise aufheben. Welche Tendenz vorherrscht, hängt von der Korrelation der Fehler ab. Diese korrekt zu spezifizieren ist daher von grundlegender Bedeutung. Für Prognosen auf nationaler Ebene sind vier Typen von Korrelationen von Relevanz (Keilman et al. 2002): zeitliche Korrelation bzw. Autokorrelation der demographischen Raten, Korrelation zwischen Komponenten, Korrelation zwischen Altersklassen und Korrelation zwischen den Geschlechtern.

Die zeitliche Korrelation bzw. Autokorrelation bei der Fertilität ist im allgemeinen hoch. Auf eine Periode hoher Fruchtbarkeit folgt meistens wieder eine weitere Periode relativ hoher Fruchtbarkeit. Unterschätzt man die Fertilität eines Jahres, unterschätzt man sie wahrscheinlich auch im folgenden Jahr. Je stärker die zeitliche Korrelation der Komponenten, desto weniger neigen Prognosefehler dazu, sich gegenseitig auszugleichen.

Man muss allerdings in unserem Kontext zwischen hoher Autokorrelation und perfekter Autokorrelation unterscheiden. Über einen Prognosezeitraum von 50 Jahren reduziert sich selbst ein (anfänglicher) Autokorrelationskoeffizient von 0,95 auf 0,08 ( $=0,95^{50}$ ). Für die

Migration dürfte die serielle Korrelation geringer ausfallen, da Migration sehr stark von den politischen Rahmenbedingungen abhängt, die sich schneller ändern als Fortpflanzungsmuster. Ebenso ist die serielle Korrelation bei der Mortalitätsrate a priori unklar. Wie aber später gezeigt wird stellen hier Prognosefehler kein Problem dar, da die Mortalität im betrachteten Zeitraum fast linear abnahm. Was die Korrelation zwischen einzelnen Komponenten betrifft, so besteht in entwickelten Ländern kein Grund anzunehmen, dass Mortalität, Fertilität und Migration korreliert sind.

Bezüglich der Korrelation benachbarter Altersklassen nimmt man normalerweise einen positiven Zusammenhang an. Unterschätzt man die Fruchtbarkeit der 22-Jährigen, ist es wahrscheinlich, auch die Fruchtbarkeit der 23-Jährigen zu unterschätzen. Je stärker die Korrelation zwischen den Altersklassen, desto weniger heben sich die Prognosefehler bei getrennter Modellierung gegenseitig auf.

Schließlich unterstellt man für Mortalität und Migration auch eine positive Korrelation zwischen den Geschlechtern. Dies führt ebenfalls dazu, dass sich Prognosefehler nicht aufheben sondern verstärken.

Gegenwärtig verfolgt man drei Ansätze, um zu Prognoseintervallen demographischer Größen zu gelangen. Der erste basiert auf der Analyse historischer Prognosefehler und wurde von Keyfitz (1981) und Stoto (1983) entwickelt. Man vergleicht frühere Prognosen mit der tatsächlichen Bevölkerungsentwicklung und leitet daraus den Standardfehler der Prognose ab, den man zur Konstruktion des Prognoseintervalls verwendet. Zentrale Annahme dieses Verfahrens ist, dass zukünftige Schwankungen der demographischen Größen den historischen ähneln und insbesondere die früheren Fehleinschätzungen auch für die Zukunft gelten. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass man Prognosemethoden vergleichbarer Qualität einsetzt. Keilman et al. (2002) weisen jedoch darauf hin, dass nur relativ kurze Zeitreihen historischer Prognosefehler zur Verfügung stehen, und sich die Prognosefehler durch bessere Methoden und mehr Erfahrung vermindert haben dürften.

Ein zweiter Ansatz beruht auf den Annahmen von Expertengruppen sowohl über die zukünftige Entwicklung der demographischen Raten als auch ihrer Unsicherheit (Lutz, Sanderson und Scherbov 1996). Mit diesem Verfahren ist bereits eine stochastische Bevölkerungsprognose für Deutschland erstellt worden (Lutz und Scherbov 1998). In einem Diskussions- und Argumentationsprozess einigt sich die Expertengruppe sowohl auf eine Punktschätzung als auch auf ein 90% Konfidenzintervall des Bevölkerungsparameters zu einem zukünftigen Zeitpunkt. Unter einer Verteilungsannahme des Parameters und weiteren Annahmen bezüglich der Korrelation der Komponenten wird durch Simulation eine Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugt. Lee (1998) gibt jedoch zu bedenken, dass selbst Experten kaum in der Lage sein werden, sinnvoll zwischen einem 95% und einem 99% Konfidenzintervall zu unterscheiden. Weiterhin unterstellt auch dieses Verfahren perfekte serielle Korrelation der Prognosefehler und führt somit zu inkonsistenten Konfidenzintervallen.

Ein dritter Ansatz verwendet Zeitreihenmodelle, um die Komponenten der Bevölkerungsentwicklung zu prognostizieren. Derzeit prominentester Vertreter ist Ronald Lee, der Prognosemodelle für Fertilität (Lee 1993) und Mortalität (Lee und Carter 1992) entwickelt und zusammen mit Tuljapurkar die US Bevölkerung stochastisch prognostiziert (Lee und Tuljapurkar 1994) hat. Nur Zeitreihenmodelle erlauben es, die mit einer Prognose verbundene Unsicherheit konsistent abzubilden. Auf dieser Methode beruht wesentlich auch der vorliegende Beitrag.

Bei dieser Methode wird die Unsicherheit durch eine Verteilung abgebildet. Die Weite des Konfidenzintervalls wird dabei durch das Schwankungsverhalten der Zeitreihe in der Vergangenheit und die Länge des Prognosehorizonts determiniert. Bei der vorliegenden Modellierung wird die historische Zeitreihe nur solange zurück berücksichtigt, wie keine strukturellen Brüche aufgetreten sind. Selbstverständlich kann man solche Brüche für die Zukunft nicht ausschließen, allerdings bedingt diese eine erhebliche Ausweitung der in der Zukunft zu berücksichtigenden Konfidenzintervalle<sup>1</sup>. Das gilt vor allem für die Geburtenrate. Bei der Berücksichtigung einer längeren Zeitreihe hätte man starke Korrekturen bei den zukünftigen Geburtenraten vornehmen müssen, um sich noch in einem plausiblen Rahmen zu bewegen<sup>2</sup>. Das vorliegende Modell ist also lediglich bei Vorliegen einer strukturell „kontinuierlichen“ Entwicklung der verwendeten Bevölkerungsparameter gültig. Um Schocks auf Prognoseintervalle beziehen zu können, werden komplexere Zeitreihenmodelle benötigt, die den hier anvisierten Rahmen sprengen würden. Eine weitere Möglichkeit der Modellierung von Schocks könnte unter stochastischem Einbezug von Brüchen erfolgen. Solche träten dann alle m Jahre mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf. Auch diese Alternative wird im vorliegenden Beitrag nicht weiter verfolgt.

### 3. Datenlage

Eine kritische Position bei Zeitreihenanalysen ist die Verfügbarkeit von hinreichend langen, konsistenten Zeitreihen. Lange Zeitreihen erhöhen den Aussagegehalt der stochastischen Prognose, da sie durch mehr Freiheitsgrade zu valideren Ergebnissen führen.

In diesem Abschnitt werden die verwendeten Quellen, die Datenlage und die Plausibilisierungen beschrieben, die vor der Modellierung notwendig waren.

#### 3.1 Quellen

Die für die stochastische Schätzung verwendeten historischen Bevölkerungsdaten wurden aus unterschiedlichen Quellen zusammengestellt und hieraus konsistente Zeitreihen gebildet. Diese Quellen wurden mit bestimmten Prioritäten versehen und in dieser Reihenfolge in den Modelldatensatz integriert. Grundsätzlich wurden alle relativen Werte durch Berechnung aus den Absolutwerten hergeleitet, d.h. es wurden nur absolute Geburten-, Bevölkerungs- und Gestorbenenzahlen entnommen. Zwischen verschiedenen Quellen traten Bruchstellen auf, die meist durch eine zeitliche "Verschiebung" konsistent gemacht werden konnten. Die folgende Auflistung stellt die Prioritäten bei der Verwendung der Daten für den zu erstellenden Datensatz dar:

##### **Human Mortality Database. [www.mortality.org](http://www.mortality.org) ("HMD web")**

Im Rahmen dieses Gemeinschaftsprojekts der University of California, Berkeley, und des Max Planck Instituts für demografische Forschung in Rostock wurden Bevölkerungs- und Mortalitätsdaten aus bisher 17 Staaten zusammengestellt. Zentrales Anliegen des Projektes ist es, trotz der zum Teil stark divergierenden Form und Qualität der Daten aus

---

<sup>1</sup> Vergleiche in diesem Zusammenhang die Diskussion und die quantitativen Konsequenzen der Einbeziehung der Grippeepidemie in 1918 in den USA im Hinblick auf das Konfidenzintervall für die Bevölkerungsvorausschätzung, in Lee und Carter 1992.

<sup>2</sup> Vgl. die notwendigen Korrekturen bei Zugrundelegung einer langen Zeitreihe für die Totale Geburtenrate in Keilman et al. (2002).

den verschiedenen Ländern eine einheitliche Methode bei der Berechnung der Sterbetafeln anzuwenden.

Die Daten wurden im Rahmen des Gemeinschaftsprojektes den Bedürfnissen angepasst, so dass es zu Differenzen zwischen den Rohdaten (i.a. von den nationalen Statistischen Ämtern zur Verfügung gestellt) und den HMD-web Daten kommen kann. In den Rohdatensätzen erfolgte meist keine differenzierte Erfassung der Bevölkerungszahl und der Anzahl der Toten ab dem Alter von 90 oder 95 Jahren. Bei HMD-web Daten wurde, basierend auf Zensusdaten, ein modifiziertes Interpolationsverfahren genutzt, so dass pro Kalenderjahr die Bevölkerungszahl sowie die Anzahl der Toten zwischen 0 bis 110 Jahren ausgewiesen werden konnte.<sup>3</sup>

**Human Mortality Database.** [www.mortality.org](http://www.mortality.org) ("HMD raw data ")

Die Rohdaten, die den Berechnungen für die HMD in Deutschland zugrunde liegen, stammen allesamt vom Statistischen Bundesamt. Der Großteil wurde nicht anderweitig veröffentlicht. Aus Gründen der Datenbeschaffung und Konsistenz der Zeitreihen wurde nicht auf die Originaldaten zurückgegriffen.

**Statistisches Bundesamt.** [www.destatis.de](http://www.destatis.de) (soweit verschieden von HMD raw data)

Die vorliegenden, absoluten Bevölkerungszahlen des HMD web der Jahre 1955-1998 sind mit einem offensichtlichen Fehler dem jeweils folgenden Jahr zugeordnet worden. Dieser Fehler wurde durch Abgleichung der Daten mit dem Datenbestand des statistischen Bundesamtes sowie den Rohdaten der HMD korrigiert. Dies führte z.B. dazu, dass die bei HMD web veröffentlichten Bevölkerungszahlen des Jahres 1956 in den Datensatz für das Jahr 1955 eingesetzt wurden. Für die Bevölkerungszahlen von 1954 wurde auf die Rohdaten der HMD zurückgegriffen. Die Bevölkerungszahlen der Jahre 1999 und 2000 entstammen den statistischen Jahrbüchern der Jahre 2001 und 2002<sup>4</sup>. Als Ausgangsbevölkerung stehen die Daten im Statistischen Jahrbuch 2003 mit der Bevölkerung vom 31.12.2001 zur Verfügung.

### 3.2 Fertilität

Im Rahmen der Fertilitätsstudien wurden altersspezifische, querschnittbezogene Geburtenziffern des Alters  $x$  im Jahre  $t$  durch die Relation der Lebendgeborenen von Müttern des Alters  $x$  im Jahr  $t$  zu der Anzahl der Frauen des Alters  $x$  im Jahr  $t$  gebildet.

$$f_{x,t} = \frac{\#\{\text{Lebendgeborene}_{x,t}\}}{\#\{\text{Frauen}_{x,t}\}} \quad (1)$$

Summiert man die Geburtenziffern der Frauen zwischen 15 und 49 auf, erhält man die totale Fertilitätsrate (TFR) des Jahres  $t$ .

$$TFR_t = \sum_{x=15}^{49} f_{x,t} \quad (2)$$

Man interpretiert die Fertilitätsrate einer Periode als die durchschnittliche Anzahl Kinder, die eine Frau zur Welt bringt, wenn die altersspezifischen Geburtenziffern der betreffenden Periode für sie gelten (Bongaarts und Feeney 1998). Die TFR ist damit ein synthetisches Maß, da diese Geburtenziffern für keine reale Gruppe von Frauen zutreffen.

<sup>3</sup> Vgl. Methods Protocol for the Human Mortality Database (2002), S. 8ff.

<sup>4</sup> Der Wert für die Anzahl der 62jährigen Frauen im Jahre 2000 ist im Statistischen Jahrbuch 2002 mit 165.500 offensichtlich deutlich zu niedrig beziffert. Er wurde durch den korrekten Wert (465.500) ersetzt, der aus der Differenz zwischen der gesamten Bevölkerung dieses Alters und der Anzahl der 62jährigen Männern rekonstruiert werden konnte

### 3.2.1. Westdeutschland

Die Geburtenraten im Westen weisen starke Strukturbrüche auf. Die Jahre von 1954 bis 1966 sind durch eine sehr hohe Fruchtbarkeit gekennzeichnet. Die totale Fertilitätsrate als Fläche unter den jahresspezifischen Schnitten in Abbildung 1 erreichte 1964 mit 2,54 Kindern pro Frau ihren Höhepunkt. Dieser Zeit des Babybooms folgt der Babybust, eine Periode stark rückläufiger Fruchtbarkeit. Seit 1973 hat sich das Niveau der Fertilitätsrate stabilisiert und schwankt im Westen um einen Wert von 1,4 Kindern pro Frau. Es liegt damit deutlich unter 2,1, dem für den Erhalt der Bevölkerung notwendigen Niveau.

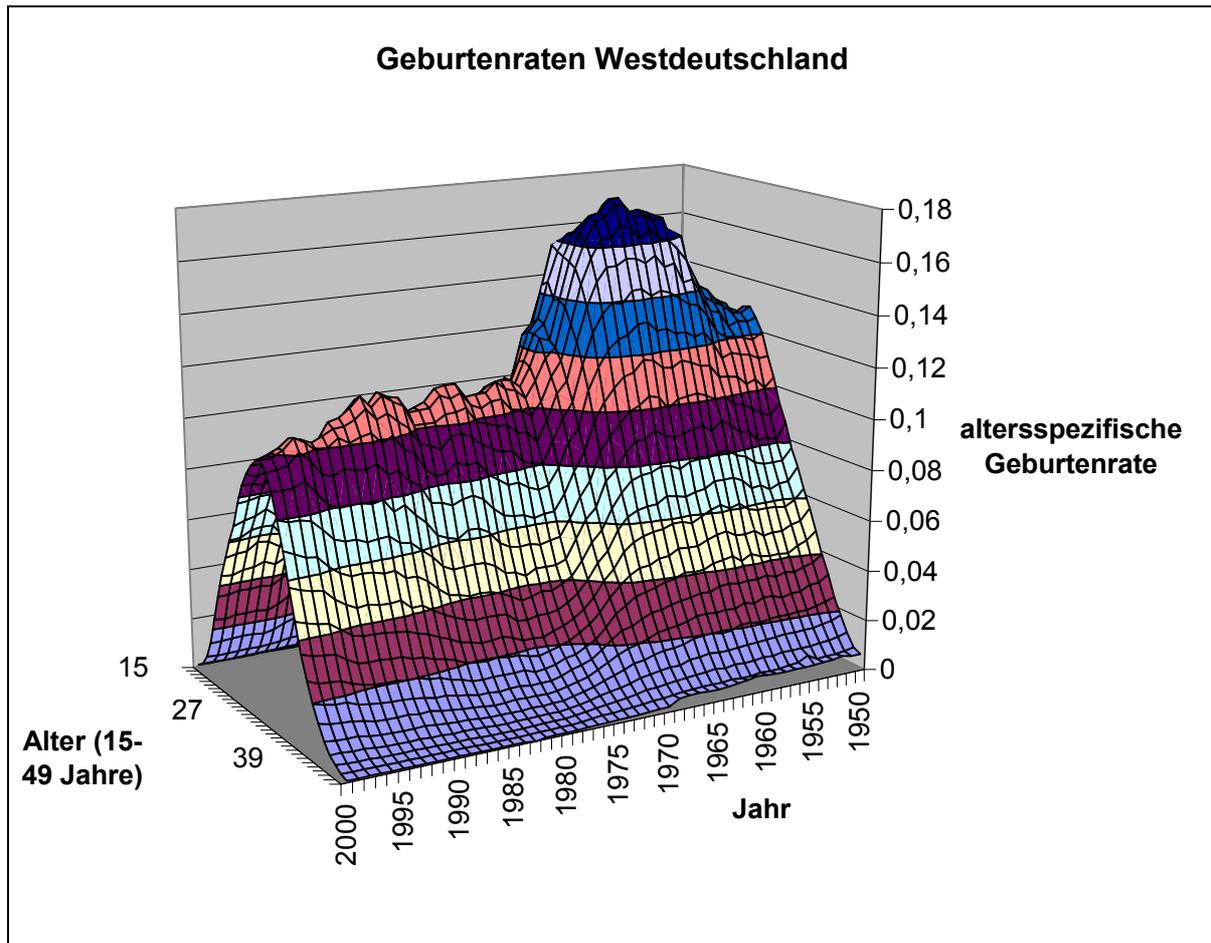


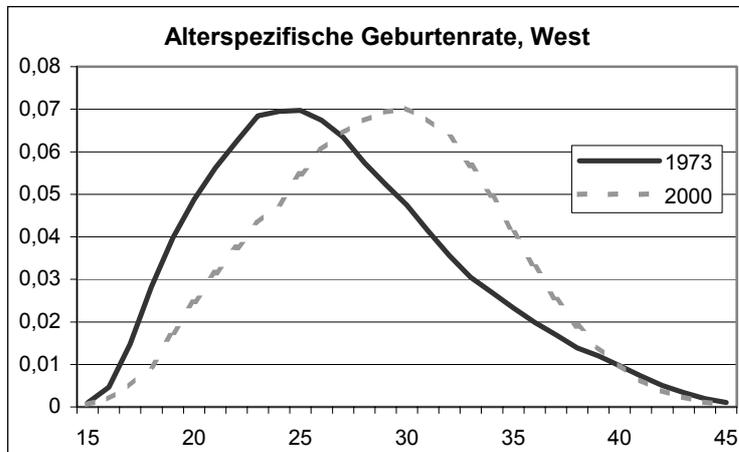
Abbildung 1: Geburtenraten 1950-2000, nach Alter der Frauen, Westdeutschland

Dennoch vollziehen sich weiterhin Veränderungen. So beobachtet man seit Jahrzehnten den Trend, dass das Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt bei der Geburt ansteigt. Lag das Durchschnittsalter 1973 in Westdeutschland noch bei 26,8 Jahren, hat es sich bis zum Jahr 2000 auf 28,9 Jahre erhöht.

Dieser „postponement“ Trend (Hajnal 1947) besagt, dass die Fruchtbarkeit von Frauen in den frühen Jahren ihrer reproduktiven Zeit sinkt, was jedoch durch eine Erhöhung in späteren Jahren kompensiert wird. Tendenziell jedoch wird mit der Verschiebung von Geburten ein geringeres Fruchtbarkeitsniveau assoziiert. Kohler, Billari und Ortega (2002) zeigen, dass eine Erhöhung des Durchschnittsalters bei Geburt des ersten Kindes zu einer signifikant niedrigeren Kohortenfertilität führt. Weiterhin haben Bongaarts und Feeney (1999) gezeigt, dass auch die TFR durch Tempoeffekte verzerrt wird: Werden Geburten nach hinten verlegt,

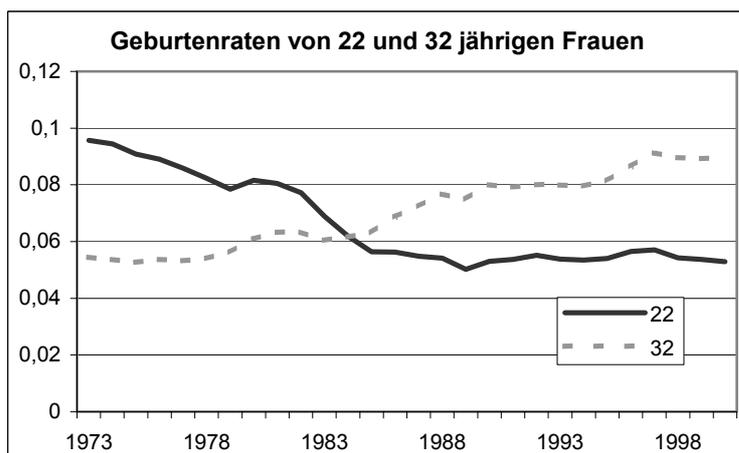
sinkt die TFR, werden Geburten vorgezogen, steigt die TFR einer Periode relativ zur Situation ohne Tempoeffekte.

Die folgenden Grafiken veranschaulichen diese Entwicklung.



**Abbildung 2: Geburtenrate nach Alter der Frauen, Vergleich von 1973 und 2000 (normiert), Westdeutschland**

Abbildung 2 zeigt die relativen Geburtenhäufigkeiten in Abhängigkeit vom Alter der Frauen für die Jahre 1973 und 2000. Die rechtsschiefen Kurve von 1973 ist in 2000 beinahe symmetrisch geworden. In 1973 haben Frauen unter 26 Jahren 53% der Kinder zur Welt gebracht, 2000 waren es nur noch 33%. Die folgende Abbildung 3 zeigt die Entwicklung von Geburtenziffern 22-jähriger und 32-jähriger Frauen im Zeitablauf. Die Geburtenziffern der 22-jährigen haben sich bis Mitte der 80iger Jahre stark verringert und verharren seitdem auf relativ niedrigem Niveau. Für die Geburtenziffern der 32-jährigen ist jedoch eindeutig ein positiver Trend festzustellen. Seit 1985 bringen Frauen, die 32 Jahre alt sind, mehr Kinder zur Welt als ihre 10 Jahre jüngeren Geschlechtsgenossinnen.



**Abbildung 3: Geburtenraten von 22- und 32-jährigen Frauen im Vergleich, Westdeutschland**

### 3.2.2. Ostdeutschland

Für Ostdeutschland ist die Datenlage bedeutend schlechter als für Westdeutschland einzuschätzen. Die Zeit vor der Wiedervereinigung ist durch erhebliche Schwankungen und Ausreißer geprägt, wie Abbildung 4 belegt. Um das Jahr 1990 gibt es erheblich Brüche, die

nicht aus realen Verhaltensänderungen stammen können, sondern ihre Ursachen vermutlich eher in der Harmonisierung und Integration der DDR Statistiken mit den westdeutschen Daten haben.

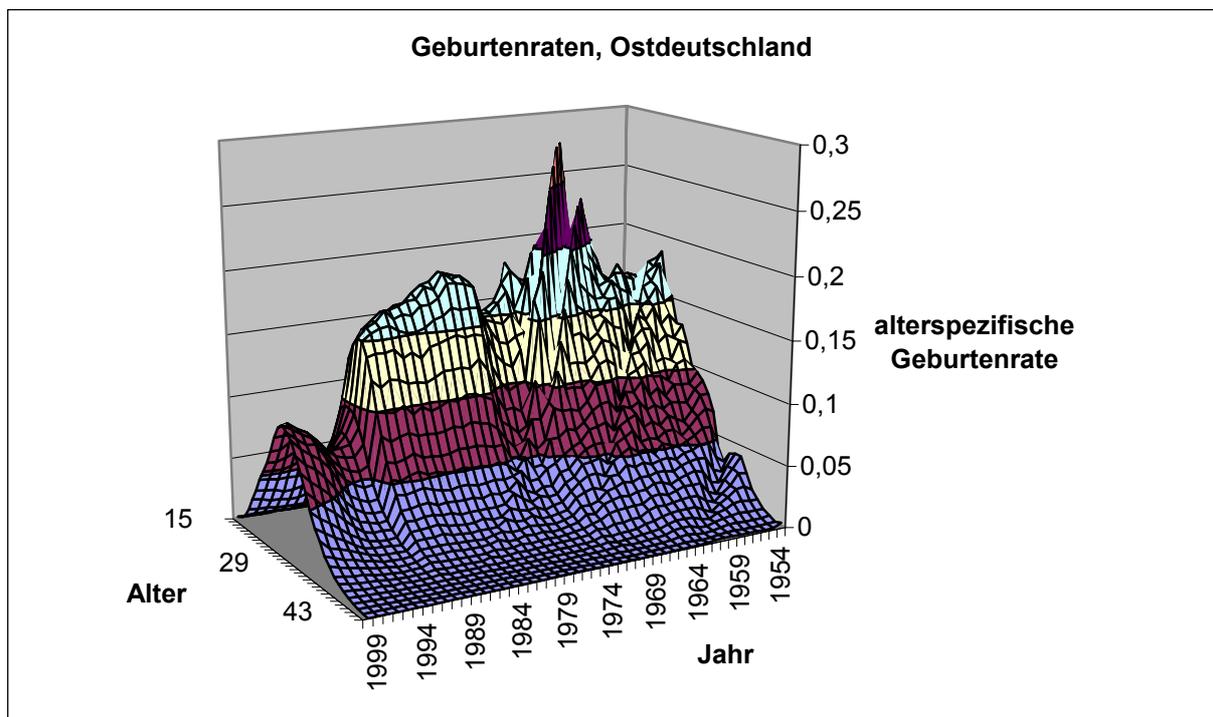


Abbildung 4: Geburtenziffern 1950-2000, nach Alter der Frauen, Ostdeutschland

Deutlich ist, dass die Mütter in der DDR bedeutend jünger als im Westen waren. Allerdings findet in Bezug auf die aggregierten Parameter mittleres Alter der Mutter und totale Fertilitätsrate seit gut 10 Jahren ein Annäherungsprozess von Ost an West statt, wie Abbildung 5 verdeutlicht. Für eine Diskussion der Ursachen für die Entwicklung der ostdeutschen Fertilität nach der Wende verweisen wir auf Kreyenfeld (2003) und Lechner (2001).

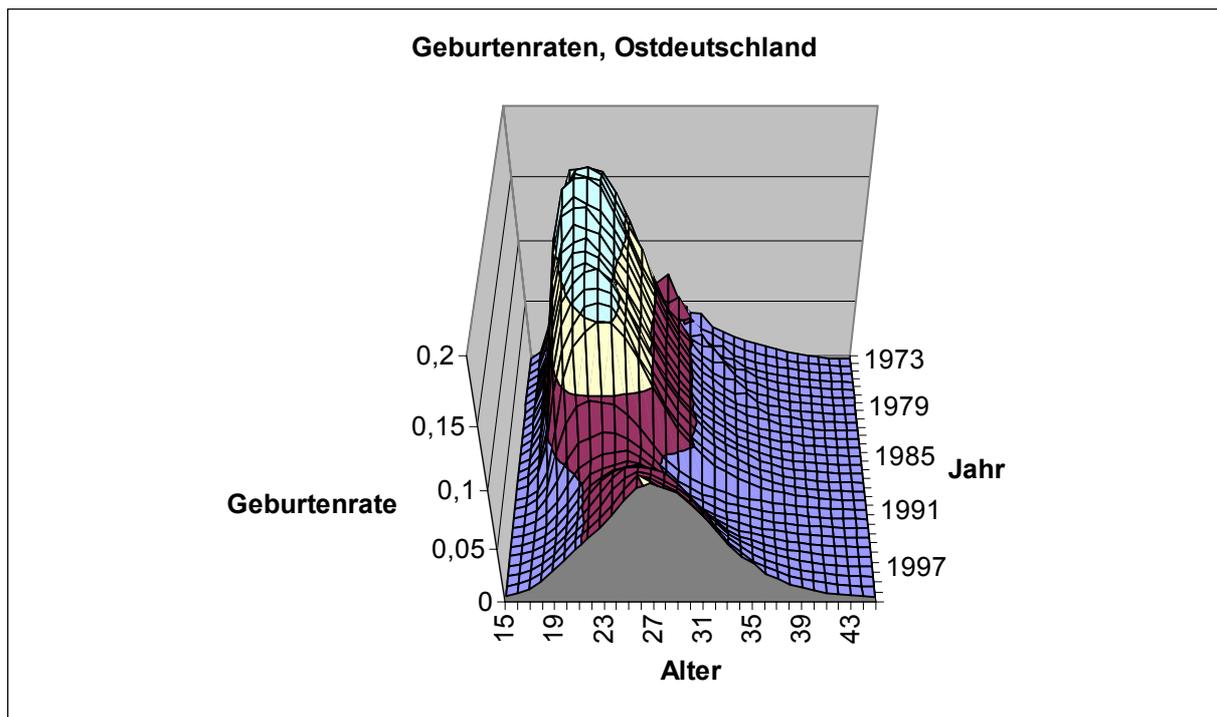


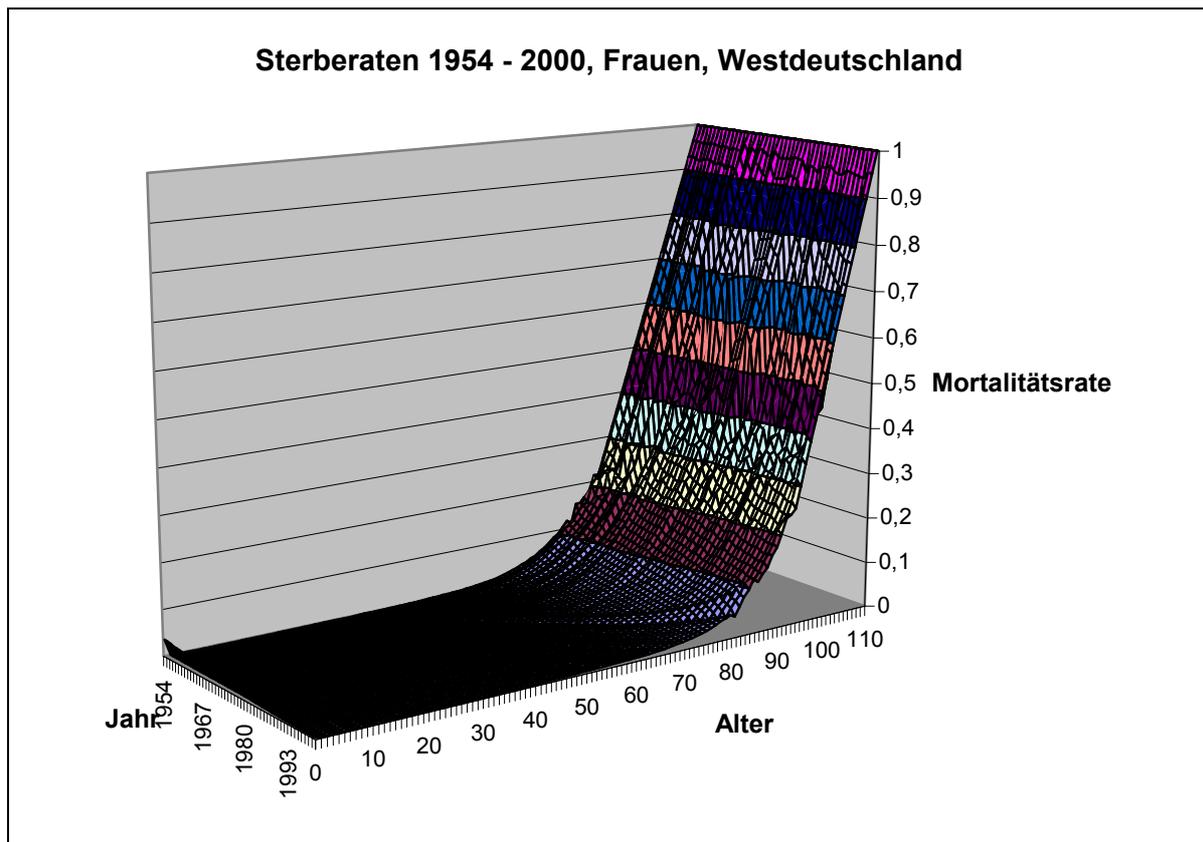
Abbildung 5: Entwicklung der altersspezifischen Geburtenziffern, Ostdeutschland

### 3.3 Mortalität

Die Mortalitätsrate wird aufgrund der unterschiedlichen Lebenserwartung für beide Geschlechter getrennt behandelt. Sie errechnet sich als Relation der gestorbenen Frauen bzw. Männer des Alters  $x$  im Jahr  $t$  zur Gesamtzahl der Frauen bzw. Männer des Alters  $x$  im Jahr  $t$ .

Sterberate Männer: 
$$m_{x,t}^m = \frac{\#\{\text{Gestorbene Männer}_{x,t}\}}{\#\{\text{Männer}_{x,t}\}} \quad (3)$$

Vollständige Zeitreihen für die Anzahl der Gestorbenen aus HMD web liegen für den Zeitraum seit 1956 vor. Die Daten für 1954 und 1955 wurden aus den Statistischen Jahrbüchern von 1956 und 1957, die Anzahl der Gestorbenen für das Jahr 2000 wurde aus dem statistischen Jahrbuch 2002 entnommen. Die Datenlage für die erste Hälfte des 20. Jahrhunderts ist deutlich schwächer, so dass lediglich für einzelne Jahre Werte ermittelt werden konnten. Diese wurden in der Untersuchung zur Plausibilisierung langfristiger Trends genutzt. Problematisch ist, dass die unterschiedliche Herkunft der Daten oder Interpolation zu Inkonsistenzen geführt haben. So kommt es zu Mortalitätsraten größer 1 oder auch fallenden Mortalitätsraten alter Menschen bei zunehmendem Alter. Um diese Inkonsistenzen zu bereinigen, wurde der im Kalenderjahr erste inkonsistente Wert ab einem Alter von 80 ermittelt (z.B. 1,05 bei den 89-Jährigen). Der vorhergehende Wert (z.B. 0,46 bei den 88-Jährigen) wurde bis zum Alter 110 Jahre linear interpoliert, wobei die maximale Lebenserwartung auf 110 Jahre gesetzt, d.h. die Mortalitätsrate der 110-Jährigen auf 1 gesetzt wurde. Im Beispiel steigt dadurch die Mortalität ab dem Alter 88 um 0,02454 pro Altersjahrgang. Die häufig auftretenden inkonsistenten Werte bei sehr alten Personen konnten mit diesem Vorgehen mittels einer einheitlichen Methode plausibel fortgesetzt werden. Es zeigt sich zudem, dass die späteren Schätzungen der Mortalitätsraten durch dieses Vorgehen nur unwesentlich beeinflusst wurden.



**Abbildung 6: Sterberate Frauen, Westdeutschland**

Charakteristisch für die Entwicklung ist eine kontinuierliche Abnahme der Sterblichkeit, die sich in einer zunehmenden Lebenserwartung niederschlägt. So hat sich die Lebenserwartung bei Geburt von westdeutschen Frauen zwischen 1954 und 2000 von 71 Jahren auf über 80 Jahre erhöht. Die Lebenserwartung westdeutscher Männer hat in der gleichen Zeit von 66 Jahren auf knapp 75 Jahre zugenommen, liegt jedoch erst seit Mitte der 70er Jahre höher als im Osten. Kurz nach der Wiedervereinigung war die Lebenserwartung im Westen rund drei Jahre höher als im Osten. Seitdem ist jedoch ein starker Trend zur Angleichung festzustellen. Insofern kann die Wiedervereinigung Deutschlands als struktureller Bruch aufgefasst werden. Folgende Abbildung 7 zeigt die Entwicklung der Lebenserwartung bei Geburt getrennt nach Geschlechtern und Regionen.

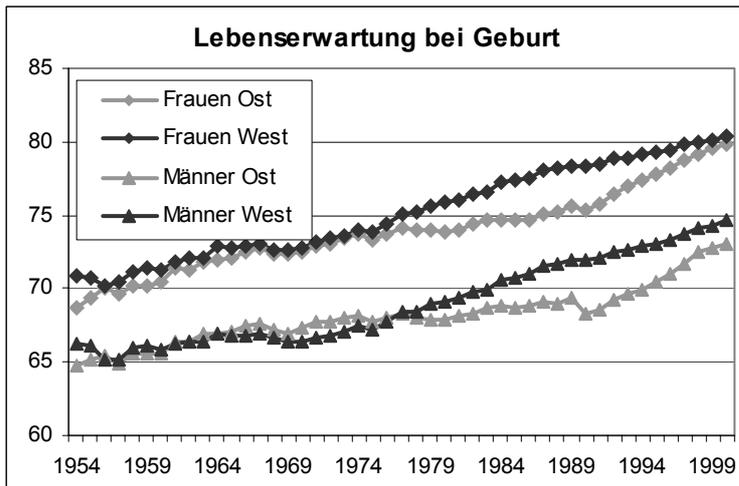


Abbildung 7: Entwicklung der Lebenserwartung Männer und Frauen, West- und Ostdeutschland

### 3.4 Migration

Die Migrationsbewegungen in Deutschland variierten in hohem Maße während der letzten 50 Jahre. Im Mittel kamen etwa 244.000 Personen netto nach Deutschland. Es wird angenommen, dass dieser Trend im Mittel auch in Zukunft gilt, was weitgehend den offiziellen Vorhersagen entspricht (vgl. 10. koordinierte Bevölkerungsvorausschätzung, Statistisches Bundesamt 2003). Die Gesamtzahl der Nettomigration wird zu 80% Westdeutschland, zu 20% Ostdeutschland zugeschlagen. Im Zusammenhang mit der altersspezifischen Zusammensetzung der Nettomigranten wird von einer Stabilität der aktuellen Verhältnisse ausgegangen. Damit reduziert sich die Unsicherheit der Schätzung auf die stochastische Modellierung der Nettomigration.

Die stochastischen Fertilitäts- und Sterberaten der ansässigen Bevölkerung wird auf die Nettoeinwanderer übertragen. Hier wird also eine rasche Verhaltensangleichung zuwandernder Personen an die Mortalitäts- und Fertilitätseigenschaften der ansässigen Bevölkerung angenommen.

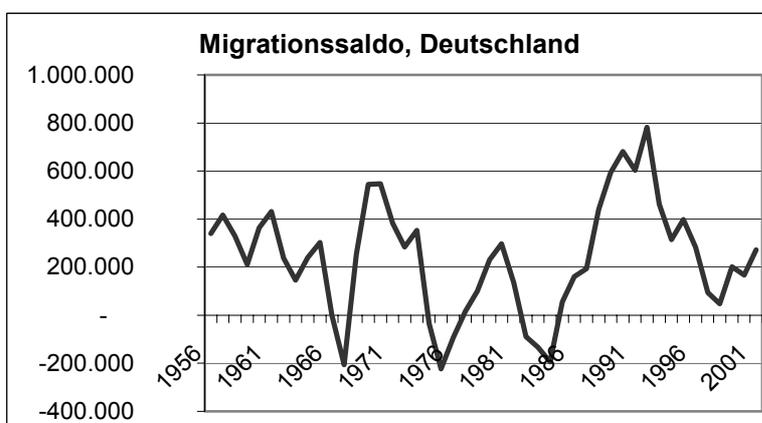


Abbildung 8: Zeitlicher Verlauf des Migrationssaldos, West- und Ostdeutschland, Zeitreihe: Statistisches Bundesamt (2001)

## 4. Modellierung

Um die zukünftige Bevölkerungsentwicklung zu modellieren, wird die Kohorten-Komponenten Methode verwendet. Bei diesem Verfahren wird die Bevölkerung zu einem bestimmten Zeitpunkt nach Alter und Geschlecht in Kohorten aufgeteilt, die Entwicklung im Zeitablauf bildet man durch drei Komponenten ab: Fertilität, Mortalität und Migration. Die Projektion erfolgt, indem man die Kohorten mit ihren jeweiligen Mortalitäts-, Fertilitäts-, und Migrationsraten multipliziert. So ergibt sich beispielsweise die Anzahl der Frauen des Alters  $x$  in Periode  $t$  durch das Produkt aus der Anzahl der Frauen des Alters  $x-1$  in Periode  $t-1$  und der entsprechenden Überlebenswahrscheinlichkeit plus dem Saldo der Migrationen.

$$\#\{Frauen_{x,t}\} = \#\{Frauen_{x-1,t-1}\} \times (1 - m_{x-1,t-1}^f) + \#Migr\{Frauen_{x,t}\} \quad (4)$$

Die Unsicherheit in der Prognose reduziert sich folglich – die Kenntnis der Bevölkerung im Basisjahr vorausgesetzt - auf die Unsicherheit bezüglich der Entwicklung der Fertilitäts-, Mortalitäts- und Migrationsraten. Daher kommt der Schätzung dieser Raten eine besondere Bedeutung zu.

### 4.1 Geburtenrate Westdeutschland

Wie oben bereits erläutert, ist der Verlauf der Fertilitätsrate seit 1954 durch zwei strukturelle Brüche gekennzeichnet, den Babyboom und den Babybust. Wenn man die komplette Zeitreihe in das Modell einbezieht, erhält man aufgrund der hohen historischen Schwankungen für weiter in der Zukunft liegende Prognosen (mehr als 20 Jahre) Konfidenzintervalle, die kaum eine vernünftige Aussage über die Zukunft zulassen. Wir haben daher entschieden, die Fertilitätsrate auf Basis der Daten ab 1973 zu schätzen.

In einem ersten Schritt parametrisieren wir die 35 Geburtenziffern (15-49-jährige potentielle Mütter) jeder Periode durch eine Glockenkurve.

$$f_t(x) = \frac{\alpha_t}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) + \varepsilon_{x,t} \quad (5)$$

mit<sup>5</sup>:

$\alpha_t$ : Niveauparameter, der als (Schätzer für die) totale Fertilitätsrate interpretiert werden kann

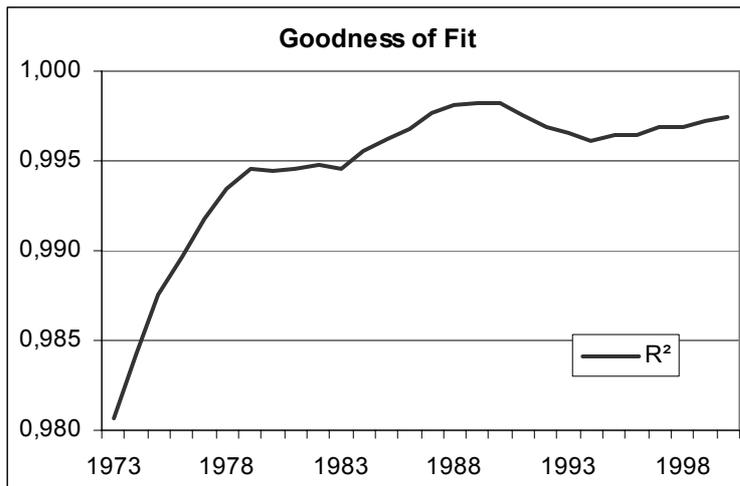
$\mu_t$ : (Schätzer für das) Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt

$\sigma_t$ : (Schätzer für die) Standardabweichung der Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt

Es hat sich herausgestellt, dass die Glockenkurve die Daten erstaunlich gut annähert, und sich zudem die Annäherung im Zeitverlauf verbessert. Damit wird der (zunächst angenommene) starke Zusammenhang der Geburtenraten zwischen benachbarten Altersklassen sowie im Zeitverlauf deutlich bestätigt. Das  $R^2$  der Regression, das 1973 schon bei 0,98 lag, hat sich weiter auf 0,997 in 2000 erhöht, vgl. Abbildung 9.

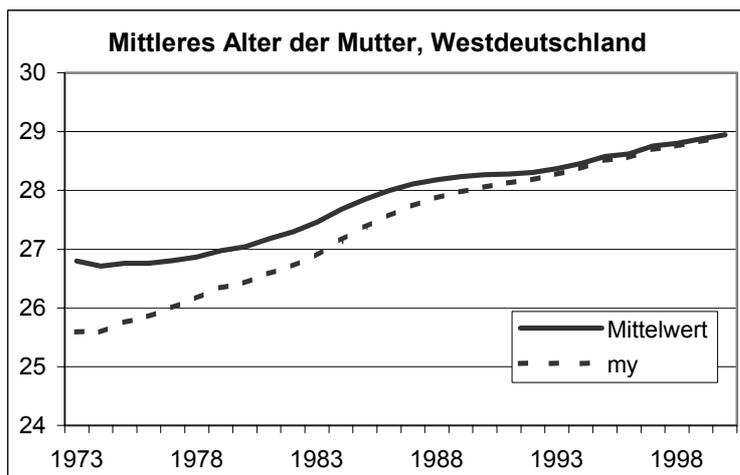
---

<sup>5</sup> Diese Interpretation gilt genau genommen nur für den parametrisierten Bereich der historischen Zeitreihe (1973-2000), da sich durch die Fortschreibung der Parameter aufgrund des wechselseitigen Zusammenhangs auch deren Interpretation ändert. Daher wird ab 2002 eine Korrektur durchgeführt.



**Abbildung 9: R<sup>2</sup> zwischen empirischer und durch Glockenkurve approximierte Geburtenrate, Westdeutschland**

Die offensichtlich zu interpretierenden Parameter  $\mu_t$  und  $\sigma_t$  nähern sich ebenfalls den empirischen Mittelwerten an, was für  $\alpha_t$  nicht gilt, vgl. Abbildung 10.



**Abbildung 10: Entwicklung des mittleren Alters von Müttern und seines Schätzers  $\mu$  (Glockenkurvenparametrisierung), Westdeutschland.**

Abbildung 10 zeigt die Entwicklung des empirisch ermittelten Durchschnittsalters von Müttern, und den entsprechenden Schätzer aus dem (glockenkurvenparametrisierten) Modell. In den ersten Jahren bildet das Modell die Realität nur relativ unvollkommen ab. Der empirische Mittelwert liegt aufgrund der Linkssteilheit der empirischen Kurve systematisch über dem geschätzten Parameter. Im Zeitverlauf jedoch wird die Annäherung immer besser, seit circa 1995 sind die Abweichungen nur noch marginal.

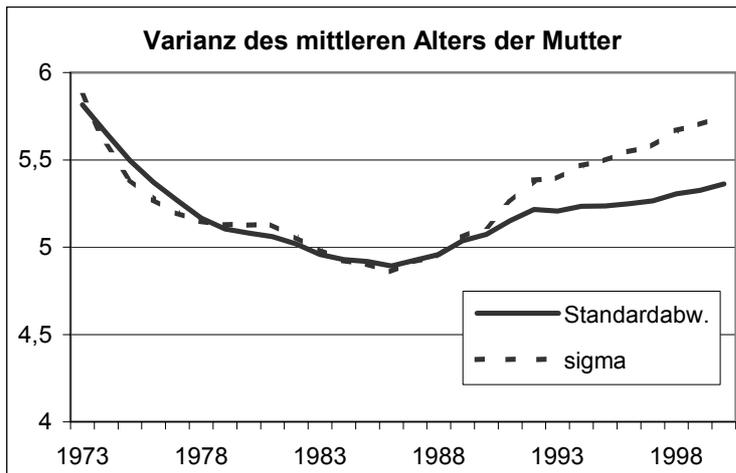


Abbildung 11: Entwicklung des Schätzers der Varianz des mittleren Alters von Müttern und seines Schätzers  $\sigma$  (Glockenkurvenparametrisierung), Westdeutschland.

Die Standardabweichung vom mittleren Alter von Müttern bei Geburt und sein parametrisiertes Äquivalent sind in Abbildung 11 dargestellt. Bis in die Mitte der neunziger Jahre zeigt die Modellierung eine gute Performance, seitdem ist der Parameter  $\sigma$  stärker gestiegen als die empirisch ermittelten Werte. Da  $\sigma$  jedoch den geringsten Einfluss auf die zukünftige Bevölkerungsstruktur hat, ist diese Ungenauigkeit von nachrangiger Bedeutung. Dabei errechnen sich die empirischen Werte wie folgt:

$$\sigma_t = \left( \frac{1}{TFR_t} \sum_{x=15}^{49} f_{x,t} (x_t - \bar{x}_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

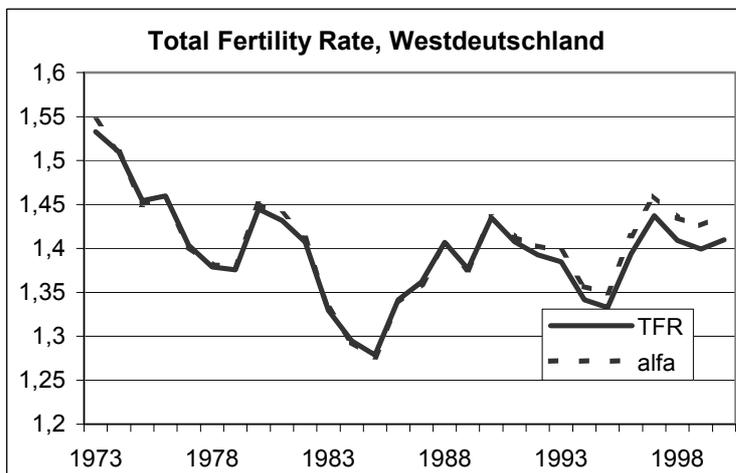


Abbildung 12: Entwicklung der TFR und ihres Schätzers  $\alpha$  (Glockenkurvenparametrisierung), Westdeutschland.

Abbildung 12 zeigt die Entwicklung der empirischen Fruchtbarkeitsrate und ihre Schätzung durch den Niveauparameter  $\alpha_t$ . Dieser zeichnet die Entwicklung der TFR überzeugend nach. Nur in den letzten Jahren kommt es zu einer Übertreibung, deren Ausmaß aber zu vertreten ist.

### 4.1.1 Prognose des mittleren Alters von Müttern bei Geburt

Entsprechend dem Verlauf von  $\mu_t$  wurde angenommen, dass der Parameter  $\alpha_t$  einer logistischen Funktion folgt. Die Unterstellung eines sigmoiden Zusammenhangs impliziert, dass das Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt zwar auch in Zukunft stetig ansteigt, der Anstieg aber immer geringer wird. In der ökonomischen Literatur werden verschiedene Faktoren angeführt, die Frauen veranlassen, Geburten nach hinten zu verlegen. In einer empirischen Untersuchung von Heckman und Walker (1990) zeigt sich eine hohe Korrelation mit dem Einkommensniveau der Frau<sup>6</sup>. Ein hohes Einkommen des Mannes hat dagegen einen gegenteiligen Effekt. Dieses Ergebnis ist allerdings weniger robust. Nach Gustaffson (2001) sind die nachteiligen Auswirkungen einer Mutterschaft auf die Karriere Hauptmotiv für spätere Geburten. Der Frau entstehen Opportunitätskosten, weil sich Investitionen in ihr Humankapital nicht auszahlen, sie zweitens für gewisse Zeit dem Arbeitsmarkt nicht zur Verfügung steht, was zu Einkommensverlusten führt, und sich drittens ihr Humankapital entwertet. Wir gehen mit dem logistischen Modell implizit davon aus, dass die Faktoren, die zu einer Erhöhung des Durchschnittsalters geführt haben, auch in Zukunft wirksam sein werden. Andererseits jedoch wird eine weitere Erhöhung des Durchschnittsalters an biologische Grenzen stoßen: Die Fruchtbarkeit nimmt schon ab einem Alter von 30 Jahren ab, während die Risiken einer Schwangerschaft mit wachsendem Alter zunehmen.

Diese Überlegungen führen dazu, folgendes nichtlineare Modell einer logistischen Funktion für den Verlauf des mittleren Alters von Müttern zu schätzen:

$$\mu_t = \frac{\bar{\mu}}{1 + \exp\{-\omega(t - t_0)\}} + \varepsilon_t \quad (7)$$

mit:

$\bar{\mu}$  : Sättigungsparameter

$\omega$  : Streckungsparameter

$t_0$  : Wendepunkt

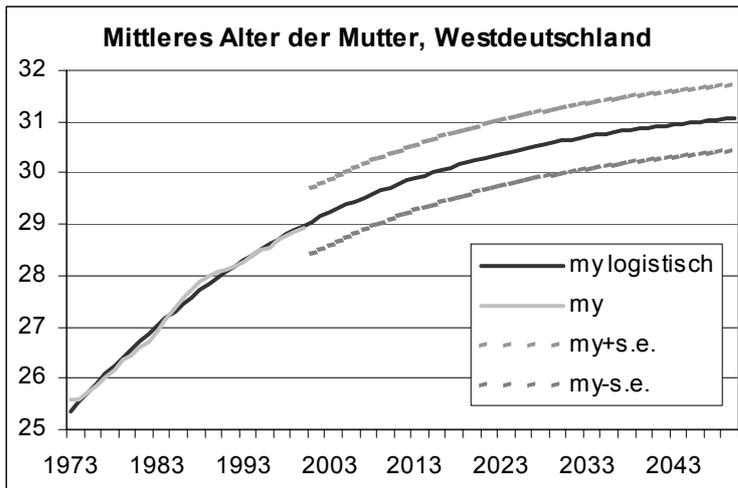
Der Sättigungsparameter lässt sich anschaulich als die obere Grenze interpretieren, gegen die das (parametrisierte) Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt konvergieren wird.

my	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
mybar	31.4542	.6399365	49.15	0.000	30.13622 32.77217
omega	.0382883	.0053301	7.18	0.000	.0273106 .0492659
t0	1935.775	2.75538	702.54	0.000	1930.1 1941.45

**Tabelle 1: Schätzparameter für die logistische Schätzung des Verlaufs des mittleren Alters von Müttern bei Geburt, Westdeutschland.**

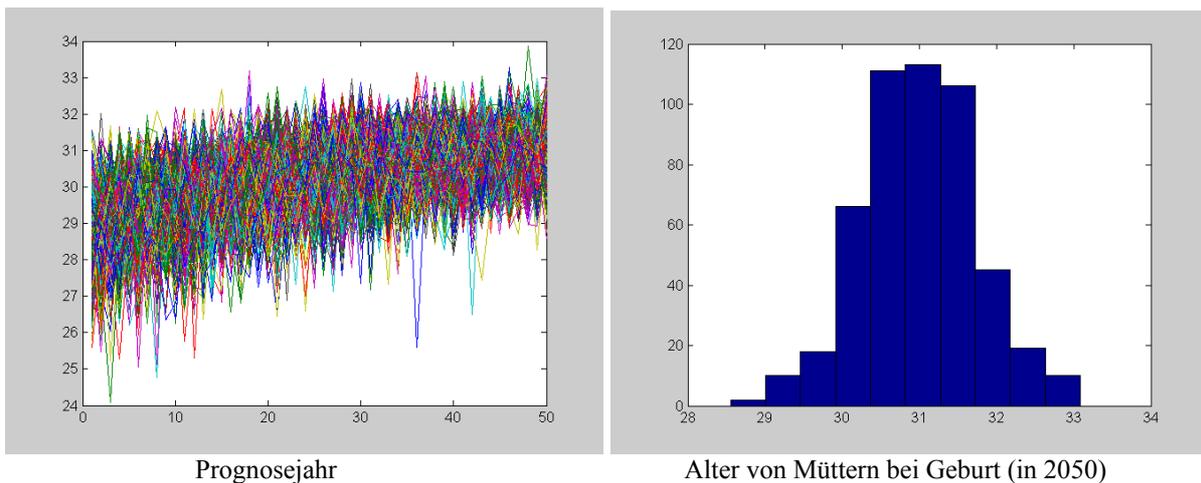
Das  $R^2$  der Regression liegt nahe 1. Alle Parameter sind hoch signifikant. Die prognostizierte obere Schranke für das mittlere Alter von Müttern bei Geburt liegt bei 31,4 Jahren. Der Wendepunkt der logistischen Funktion fällt ins Jahr 1935 und lässt sich kaum inhaltlich interpretieren. Gleiches gilt für den Streckungsparameter  $\omega$ . Abbildung 13 veranschaulicht die Prognose für  $\mu_t$  ergänzt um den Standardfehler der Regression.

<sup>6</sup> Höheres Einkommen der Frau führt zu einer späteren Erstgeburt und größeren Zeiträumen zwischen Geburten.



**Abbildung 13: Entwicklung des Schätzers des mittleren Alters von Müttern bei Geburt, der weiteren Entwicklung, und des Schätzfehlers, Westdeutschland.**

Abbildung 14 zeigt die Simulation des mittleren Alters von Müttern bei Geburt für die nächsten 50 Jahre, sowie die Verteilung im Jahr 2050.



**Abbildung 14: Simulation des mittleren Alters von Müttern bei Geburt, 2002-2051, 500 Iterationen, und Verteilung in 2050, Westdeutschland**

Gemäß der logistischen Modellfunktion steigt das mittlere Alter von Müttern bei Geburt weiter an, wobei der Anstieg gebremst wird. Die Bandbreite umfasst etwa 5 Jahre, wobei, wie in Abbildung 14 rechts zu erkennen ist, nur der Bereich Mittelwert  $\pm 1$  Jahre eine nennenswerte Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt.

#### 4.1.2 Prognose der Varianz des Alters von Müttern bei Geburt

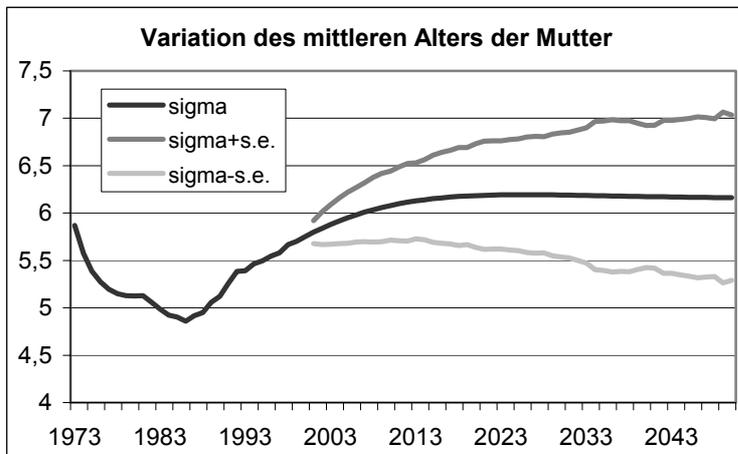
Um  $\sigma_t$  zu modellieren, verwenden wir ein VAR (Vector Autoregressive Model) mit einem Lag, in das in der rechten Seite zusätzlich das Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt und das Fruchtbarkeitsniveau eingehen. Das komplette Modell in Periode  $t$  lässt sich also durch die Werte der Vorperiode beschreiben (nur Gleichung für sigma, in Klammern Standardfehler):

(8)

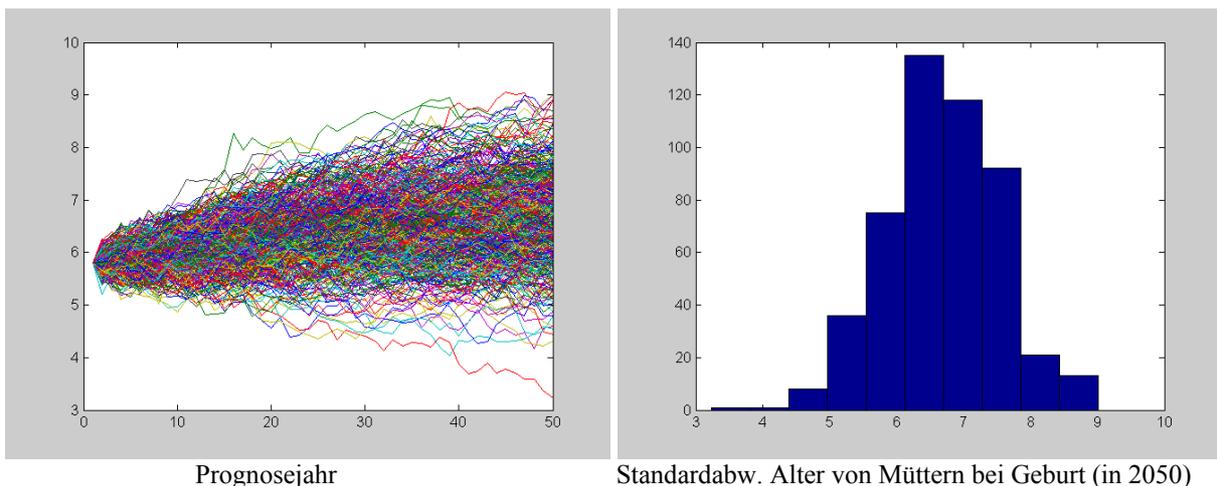
$$\sigma_t = -1,913 + 0,470\alpha_{t-1} + 0,085\mu_{t-1} + 0,796\sigma_{t-1} + \varepsilon_{3,t}$$

(0,353)
(0,214)
(0,009)
(0,044)

Auf dem 5% Level sind alle drei Parameter (mit einem Lag) positiv signifikant. Dominierend ist dabei der Einfluss von  $\sigma_{t-1}$ : Steigt  $\sigma_{t-1}$  um eine Einheit, erhöht sich  $\sigma_t$  um 0,79. Wir nutzen das Modell zur Prognose der parametrisierten Standardabweichung. Das VAR prognostiziert eine weitere leichte Erhöhung von  $\sigma_t$ , die dann ab dem Jahr 2210 stagniert. Die prognostizierte parametrisierte Standardabweichung liegt mit einem Maximum von ca. 6,2 Jahren geringfügig über dem Niveau, das in der Vergangenheit zu beobachten war. Für 2050 schätzen wir ein  $\sigma$ -Intervall von [5,29;7,03]. Abbildung 15 illustriert den historischen Verlauf und das Modell der Prognose der Standardabweichung, Abbildung 16 die Simulation von 500 Trajektorien.



**Abbildung 15: Entwicklung des Schätzers der Standardabweichung des mittleren Alters von Müttern bei Geburt, der weiteren Entwicklung, und des Schätzfehlers, Westdeutschland**



**Abbildung 16: Simulation der Standardabweichung des mittleren Alters von Müttern bei Geburt, 2002-2050, 500 Iterationen, und Verteilung in 2050, Westdeutschland**

Die Streuung der Variation des mittleren Alters von Müttern bei Geburt erhöht sich in Zeitverlauf erwartungsgemäß, in 2050 ist die Variation leicht asymmetrisch mit einem wahrscheinlichen Bereich zwischen etwa 5 und 8 Jahren.

### 4.1.3 Prognose der totalen Fertilitätsrate

Schließlich bilden wir  $\alpha_t$  durch einem Random-Walk Prozess ab, da wir nicht von systematischen Schwankungen oder Trends ausgehen.

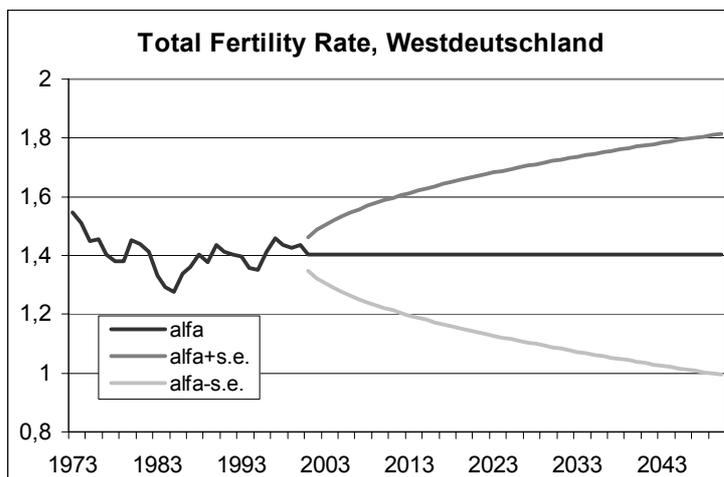
$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

Das Fruchtbarkeitsniveau hängt also lediglich vom Fruchtbarkeitsniveau der Vorperiode und einer stochastischen Komponente ab. Ein AR(1) Modell führt zu ähnlichen Ergebnissen, um jedoch sparsamer zu parametrisieren, geben wir dieser Variante den Vorzug.

alfa	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Intervall]	
alfa						
_cons	1.404743	.0109391	128.41	0.000	1.383302	1.426183
/sigma	.0578844	.007202	8.04	0.000	.0437688	.072

**Tabelle 2: Schätzparameter und Modellgüte für die Random-walk-Modellierung von  $\alpha_t$ , Westdeutschland.**

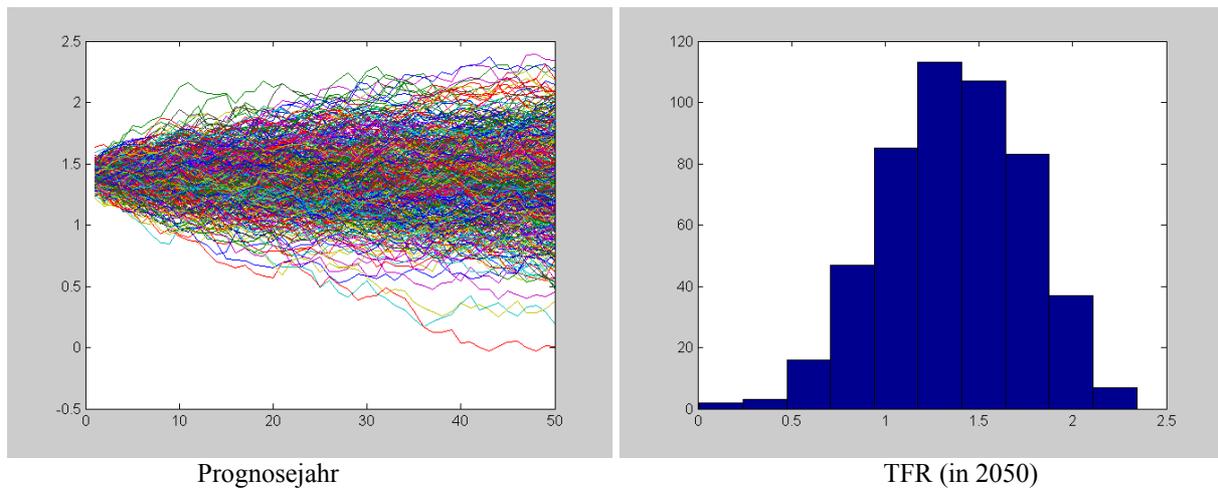
Der Wert des Koeffizienten berechnet sich einfach als das arithmetische Mittel der  $\alpha_t$  zwischen 1973 und 2000. Somit führt dieses Verfahren zu einer durchschnittlichen Fruchtbarkeitsrate von 1,405 für den Prognosezeitraum. Wir liegen damit sehr nahe an der Annahme der offiziellen Prognose des Statistischen Bundesamtes, das eine Fruchtbarkeitsrate von 1,4 unterstellt (Statistisches Bundesamt 2003). Das Prognoseintervall wächst in diesem Fall mit der Wurzel des Prognosehorizonts, so dass sich für 2050 ein  $\sigma$ -Intervall von [0,995;1,814] ergibt.



**Abbildung 17: Entwicklung des Schätzers der TFR, der weiteren Entwicklung und des Schätzfehlers, Westdeutschland**

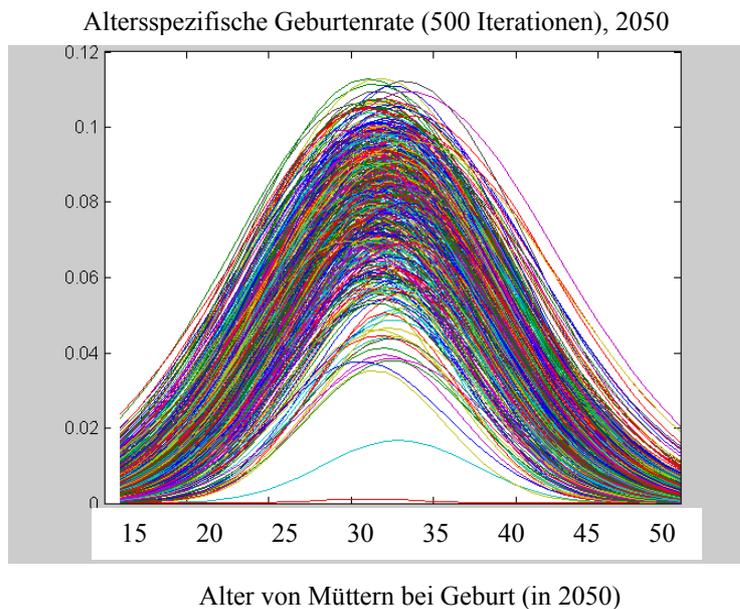
Wieder zeigt die Simulation in Abbildung 18 sehr deutlich die auf Basis dieses Modells zu erwartenden Verläufe der simulierten Trajektorien. Gut zu erkennen ist auch die starke Auswirkung der Autokorrelation: die einzelnen Trajektorien zeigen einen relativ ausgeglichenen Verlauf; Überkreuzungen halten sich in Grenzen. Etwas überraschend

erscheint die simulierte rechtssteile Verteilung der TFR in 2050. Sie zeigt, dass eine TFR von mehr als 2 als extrem unwahrscheinlich zu betrachten ist.



**Abbildung 18: Simulation der TFR, 2002-2050, 500 Iterationen, und Verteilung in 2050, Westdeutschland**

Die folgende Abbildung 19 zeigt auf Basis der Prognosen eine Simulation der altersspezifischen Geburtenraten beispielhaft für das Jahr 2050. Die Glockenform sowie die einzelnen Trajektorien sind deutlich zu erkennen:



**Abbildung 19: Simulation der altersspezifischen Geburtenraten für das Jahr 2050, 500 Iterationen, Westdeutschland**

Abbildung 20 zeigt die deterministische Entwicklung der altersspezifischen Geburtenrate während der nächsten 50 Jahre. Man erkennt qualitativ, dass die (relativ jüngeren) Altersklassen, die heute am stärksten zur TFR beitragen, in Zukunft eine vergleichsweise geringere Geburtenrate aufweisen, die (relativ älteren) dagegen höhere Geburtenraten zeigen werden.

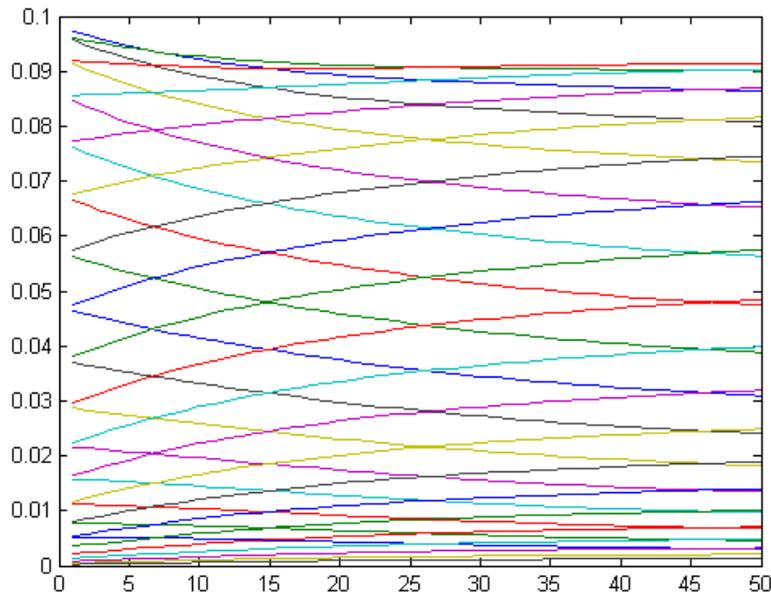


Abbildung 20: Deterministische Entwicklung der altersspezifischen Fertilitätsrate (ASFR) (ohne Legende), Westdeutschland

## 4.2 Geburtenrate Ostdeutschland

Wie Abbildung 21 verdeutlicht, gilt auch für den Osten eine starke Annäherung der tatsächlichen altersspezifischen Geburtenrate an die jeweils parametrisierte Glockenkurve:

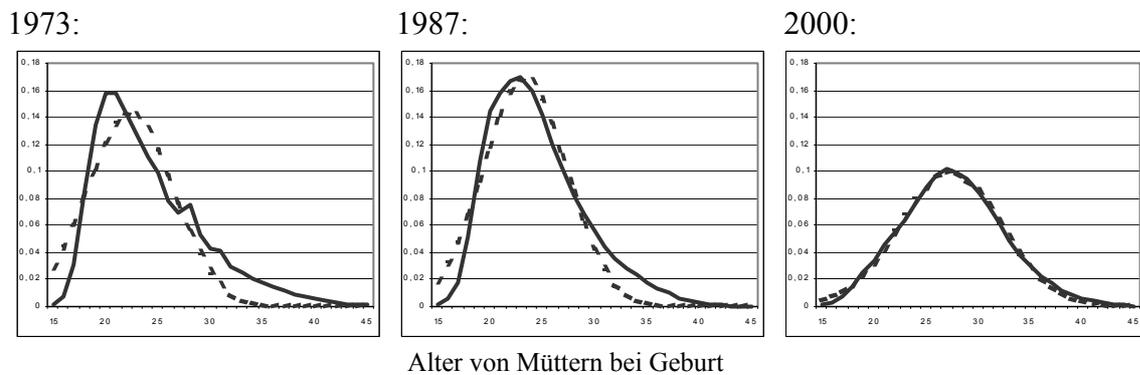


Abbildung 21: Annäherung der altersspezifischen Kurven der Geburtenraten an eine Glockenkurve, Ostdeutschland

Dies wird wieder durch den Anstieg des „Goodness of fit“ - Parameters  $R^2$  im Zeitverlauf verdeutlicht, der stark dem West Modell ähnelt:

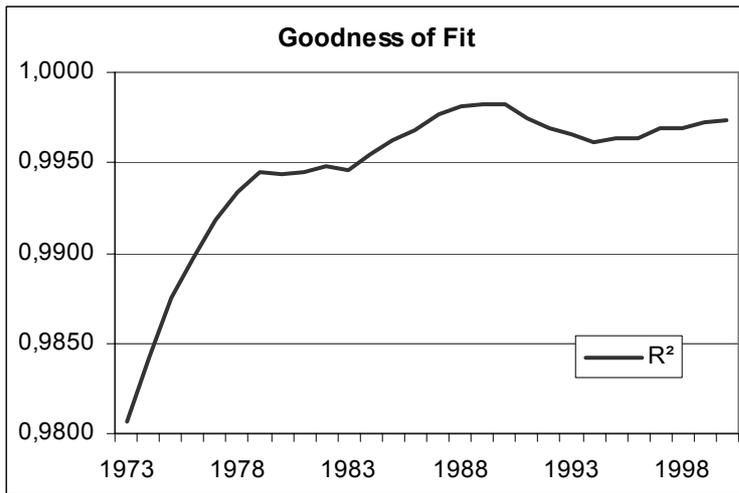


Abbildung 22:  $R^2$  zwischen empirischer und durch Glockenkurve approximierter Geburtenrate, nach Alter von Müttern bei Geburt, Ostdeutschland

Die Annäherung der ostdeutschen altersspezifischen Geburtenraten durch eine Glockenkurve wird anhand der Nähe der Schätzer zu ihren zugehörigen Parametern eindrucksvoll belegt: Die tatsächlichen Parameter werden durch die Schätzer zunehmend besser approximiert, was besonders bei der total fertility rate (TFR), aber auch beim Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt, deutlich wird. Zudem zeigt sich eine Angleichung an die westdeutschen Werte, die – schreibt man die ostdeutschen Parameter fort - in wenigen Jahren erreicht sein werden.

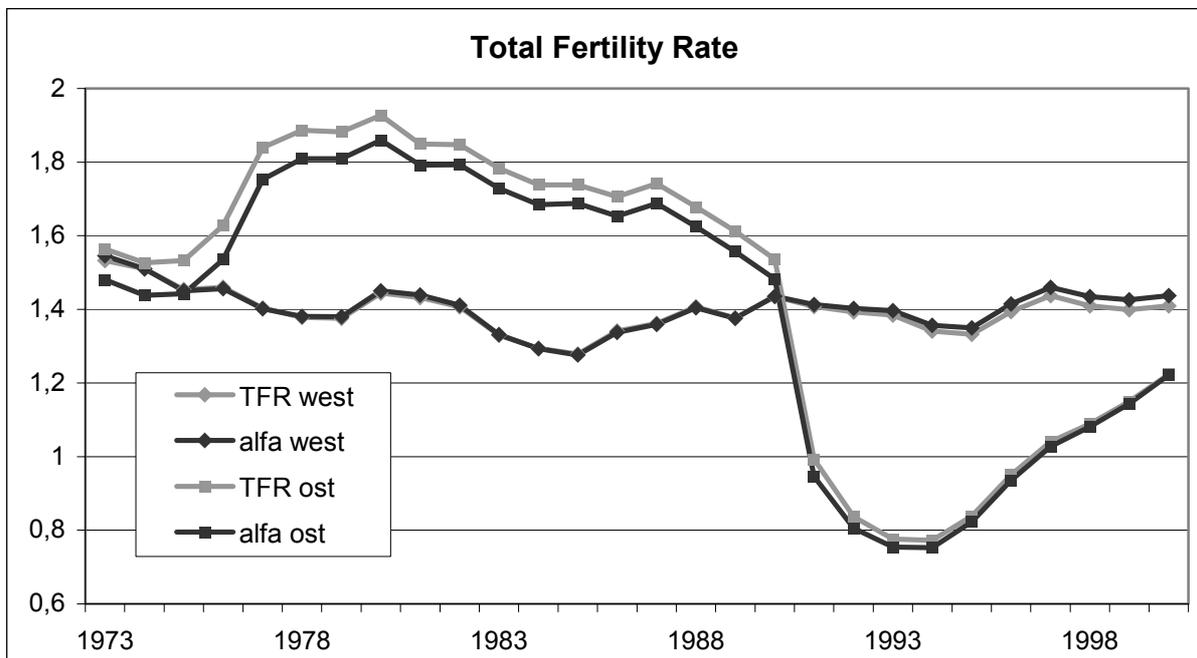
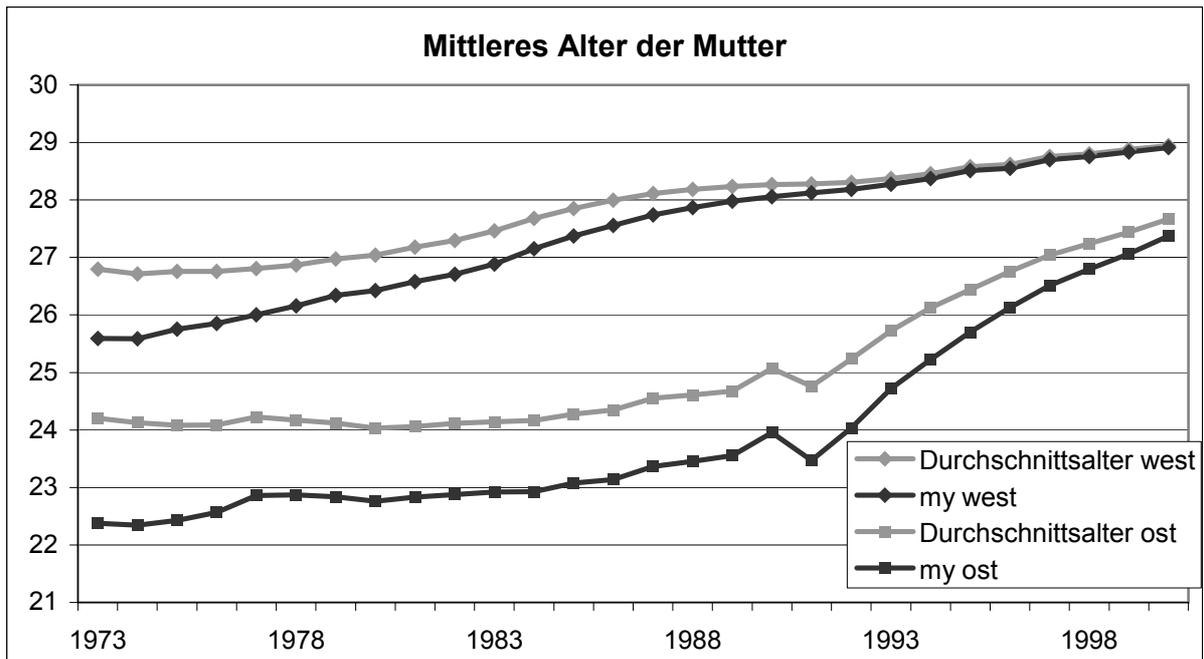


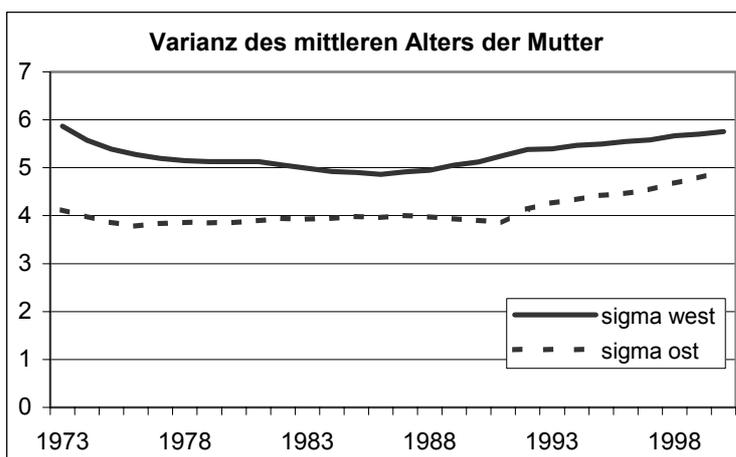
Abbildung 23: Entwicklung der TFR und ihrer Schätzer (Glockenkurvenparametrisierung) in West- und Ostdeutschland



**Abbildung 24: Entwicklung der Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt und ihrer Schätzer (Glockenkurvenparametrisierung) in West- und Ostdeutschland**

Sowohl beim Durchschnittsalter als auch bei der TFR wird ein schneller (linearer) Annäherungsprozess des Osten an den Westen angenommen, so dass das Westniveau in 2003 erreicht sein wird. Für die Zeit danach werden die entsprechenden Schätzparameter des Westens verwendet.

Etwas länger wird die Anpassung der parametrisierten Standardabweichung andauern, wobei aber auch hier eine schwache Tendenz einer Angleichung deutlich ist:



**Abbildung 25: Entwicklung der Schätzer der Standardabweichung der Durchschnittsalter von Müttern bei Geburt (Glockenkurvenparametrisierung), West- und Ostdeutschland**

Auch für die Varianz wird eine schnelle Annäherung an das Westniveau angenommen und demzufolge ab 2003 die entsprechenden Schätzparameter des Westens verwendet.

### 4.3 Mortalität Westdeutschland

Die Überlebensrate wurde mit Hilfe eines Verfahrens von Lee und Carter (1992) modelliert. Lee und Carter entwickelten eine Methode, um die altersspezifischen Überlebensraten über einen längeren Zeitraum mit Hilfe eines einfachen Modells zu beschreiben. Im wesentlichen dient das Verfahren dazu, die Alters- und zeitspezifische „Oberfläche“ der Überlebensraten zu „glätten“, d.h. mittels einer geringen Anzahl von Parametern darzustellen, ohne große Informationsverluste hinnehmen zu müssen. Hierbei sollen vor allem die zeitabhängigen Größen auf eine geringe Anzahl beschränkt werden. Das Ziel besteht darin, die die Oberfläche beschreibenden, von t abhängigen geschätzten Parameter mit Hilfe eines geeigneten Zeitreihenmodells in die Zukunft fortzuschreiben, und damit die Überlebensraten extrapolieren zu können. Wie bei anderen Zeitreihenverfahren wird auch hier von der zeitlichen Strukturkonstanz ausgegangen. Das zu schätzende Modell ist wie folgt:

$$\ln(\text{surv}_{x,t}) = a_x + b_x k_t + e_{x,t} \quad (10)$$

mit:  $\text{surv}_{x,t}$ : Überlebensrate für das Alter x während des Zeitintervalls [t-1,t].

$a_x$ : alterspezifische Überlebensrate, normiert auf  $a_x = 1/T \cdot \ln(\text{surv}_{x,t})$ .

$b_x$ : altersspezifische zeitabhängige mittlere Änderung der Mortalitätsrate (normiert auf  $\sum b_x = 1$ ).  $d \ln(\text{surv})/dt = b_x dk/dt$ , ( $dk/dt$  "fast" const.)

$k_t$ : Zeitreihenfaktor („zeitspezifische Überlebensrate“)

Im vorliegenden Fall wurde aus Stabilitätsgründen<sup>7</sup> nicht mit dem Logarithmus, sondern mit den Logits der Überlebensraten gerechnet. Im wesentlichen liefert das Lee-Carter Modell die Lösung mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (SVD) durch Projektion auf den ersten Singulärwert. Bei der SVD wird mittels der kleinsten Quadrate-Methode die Bestapproximation des folgenden Gleichungssystems gesucht (Pedroza, 2002):

$$\ln(\text{surv}_{x,t}/(1-\text{surv}_{x,t})) - a_x = b_x k_t \quad =: f(x,t) \text{ mit diskreten } x \text{ und } t. \quad (11)$$

$$(\text{=A}) \quad \quad \quad = \text{UDV}$$

Die Zerlegung  $A=UDV$  von A in die aus den Singulärwerten bestehenden Diagonalmatrix D, und den Orthogonalmatrizen U und V existiert für beliebige Rechteckmatrizen A. Dabei sind die Diagonalelemente von D der Größe nach geordnet, d.h. es gilt:  $D_{ii} > D_{kk}$  für  $i < k$ .

Analog zur Hauptachsentransformation bei quadratischen Matrizen wird eine gute Approximation von A an  $b_x k_t$  erreicht, falls der erste Singulärwert  $D_{11} \gg D_{22}$  erfüllt ist, d.h. falls sich die linke Seite der Gleichung durch die Projektion auf die erste (relevanteste) Dimension der rechten Seite gut approximieren lässt.

Bei der empirischen Untersuchung von Überlebensraten mit deutschen Daten zeigt sich, dass der erste Singulärwert mit 321 weitaus größer als der zweite mit 1,1 ist und die Approximation, d.h. die Projektion auf die Dimension des ersten Singulärwertes damit recht genau ist.

Nachdem die  $k_t$  als einzige zeitabhängige Parameter geschätzt worden sind, werden sie mit Hilfe eines univariaten ARIMA Modells untersucht. Es zeigt sich, dass der Verlauf der  $k_t$  annähernd linear ist. Im der folgenden Abbildung 26 wird der Verlauf der  $k_t$  in Westdeutschland nach Geschlecht getrennt dargestellt (bis 2000 historische Daten), zusammen mit der Schätzung eines „random walk with drift“ Modells und dem entsprechenden (+/-  $\sigma$ ) Konfidenzintervall:

<sup>7</sup> Die ermöglicht einen Wertebereich auf der linken Seite zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$ . Beim einfachen Logarithmus ergibt sich ein Wertebereich zwischen  $-\infty$  und 0.

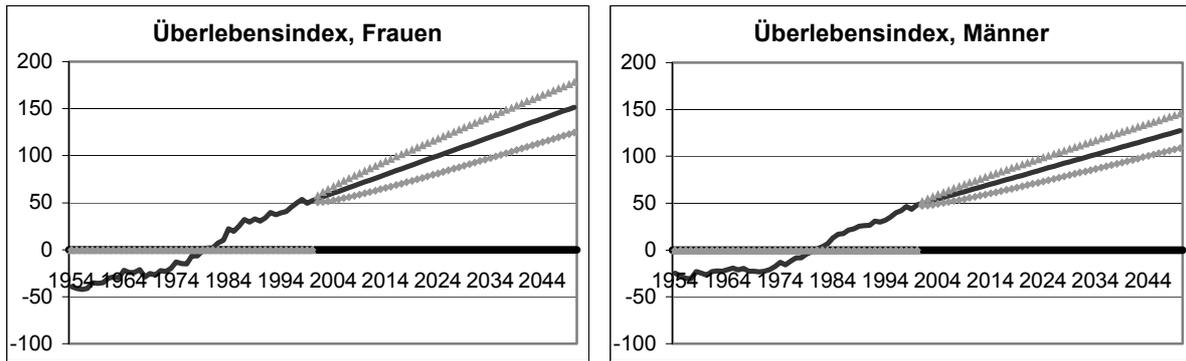


Abbildung 26: Zeitlicher Verlauf der  $k_t$  beim Lee-Carter-Modell, Frauen und Männer, Westdeutschland

Für die Fortschreibung der altersspezifischen Mortalitätsrate wurde lediglich die zeitreihenspezifische Schwankung in den  $k_t$  verwendet. Obwohl natürlich auch die Schätzung der zeitinvarianten Parameter  $a_x$ ,  $b_x$  mit Unsicherheiten behaftet sind, spielen diese im Rahmen des hier zugrundeliegenden langen Prognosehorizonts eine untergeordnete Rolle (Lee und Carter 1992).

Im Vergleich zu den ungeglätteten Sterberaten (vgl. Abbildung 6) stellt die folgende Abbildung 27 die LC-geglätteten Sterberaten für die westdeutschen Frauen dar. Man erkennt die hohe Güte der Approximation.

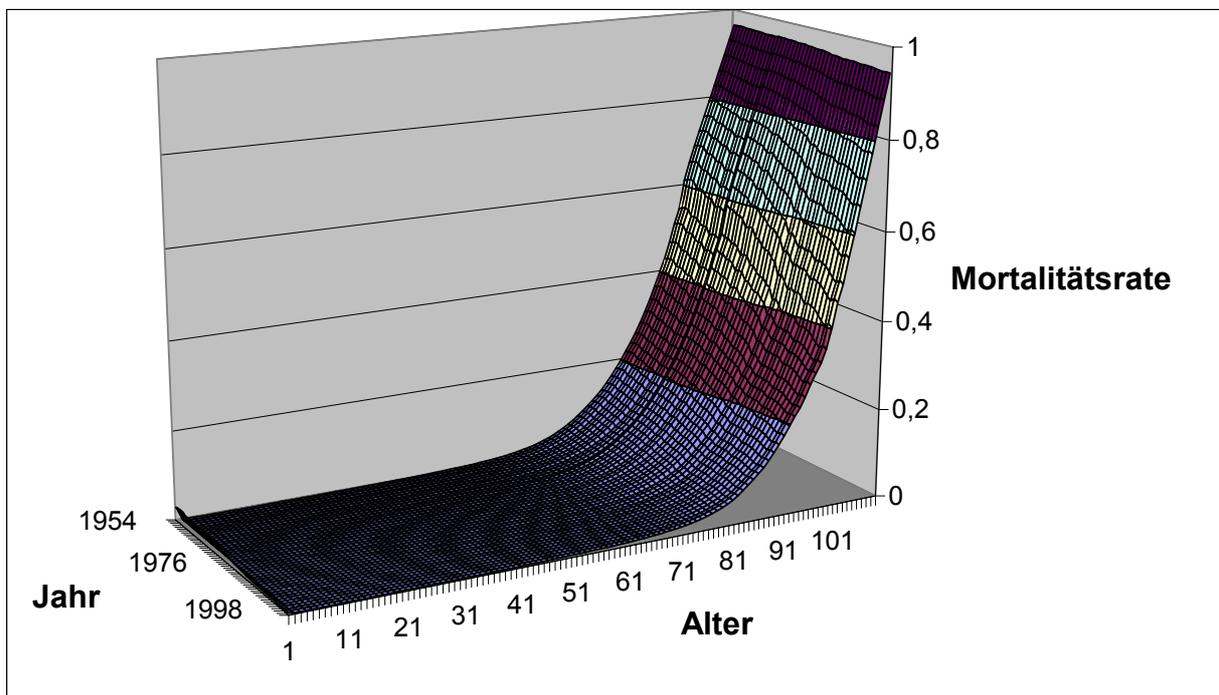
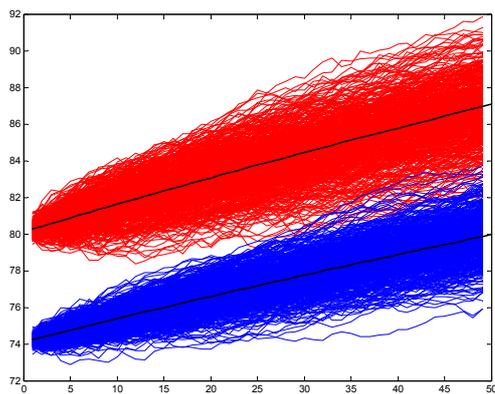
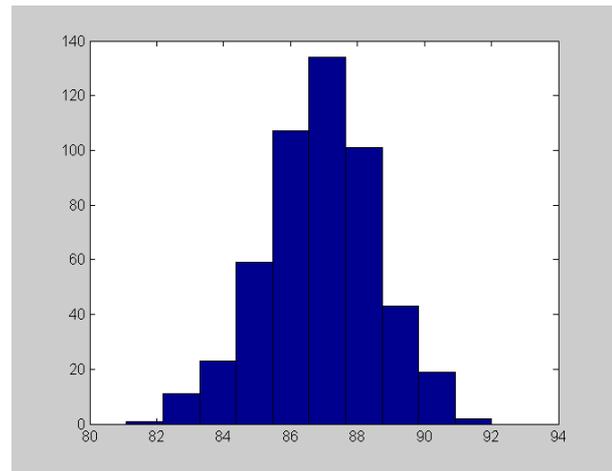


Abbildung 27: Lee-Carter geglätteten Sterberaten, Frauen, Westdeutschland

Schreibt man die geglättete altersspezifische Sterberate für die nächsten 50 Jahre fort, ergeben sich die folgenden Trajektorien der Lebenserwartung bei Geburt:



Prognosejahr



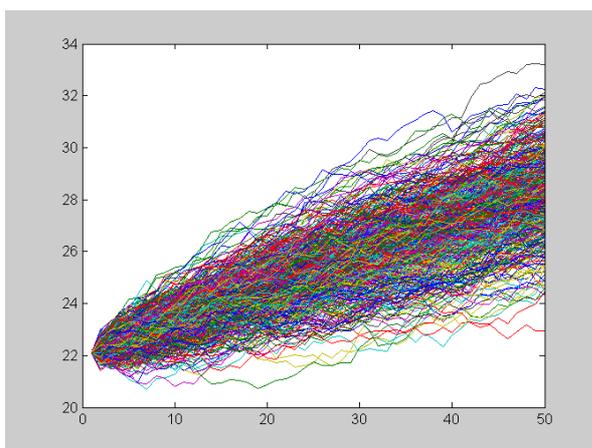
Lebenserwartung von Frauen bei Geburt (in 2050)

**Abbildung 28: Entwicklung der Lebenserwartung von Männern und Frauen bei der Geburt, Verteilung bei Frauen in 2050, 500 Iterationen, Westdeutschland**

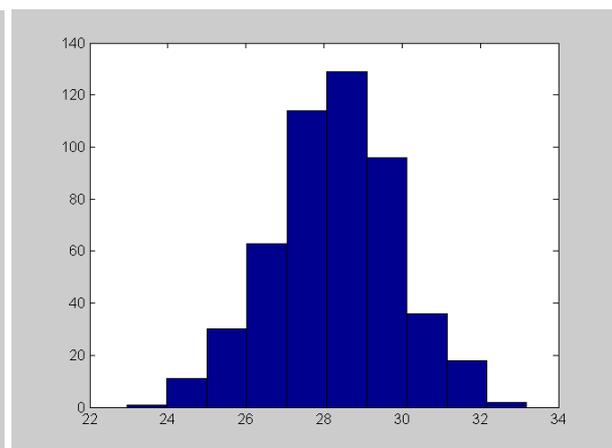
Die Verteilung in 2050 mit dem Mittelwert von 86,9 Jahren und der Standardabweichung von 1,68 Jahren schließt die niedrige und hohe Variante der Schätzungen des Statistischen Bundesamts (2003) in einem engen Intervall um den Mittelwert ein:

- Hohe Variante: Lebenserwartung neugeborener Mädchen in 2050: 88,1 Jahre
- Mittlere Variante: Lebenserwartung neugeborener Mädchen in 2050: 86,6 Jahre
- Niedrige Variante: Lebenserwartung neugeborener Mädchen in 2050: 85,7 Jahre

Ebenso wird mit dem Lee-Carter Modell die vom Statistischen Bundesamt (2003) geschätzte fernere Lebenserwartung 60-jähriger Frauen (28,2 Jahre in der mittleren Variante) durch den simulierten Mittelwert (28,3 Jahre, Standardabweichung 1,6 Jahre) beinahe punktgenau erreicht (Abbildung 29).



Prognosejahr



Fernere Lebenserwartung 60-j. Frauen (in 2050)

**Abbildung 29: Fernere Lebenserwartung 60-jähriger Frauen zwischen 2001 und 2050, 500 Iterationen, Verteilung in 2050, Westdeutschland**

## 4.4 Mortalität Ostdeutschland

Analog wie für den Westen kann die alters- und geschlechtsspezifische Sterberate für Ostdeutschland ebenfalls mit dem Lee-Carter Modell geglättet werden. Um einen direkten Vergleich zu liefern und abschätzen zu können, ob sich die Ostraten ebenso wie bei der Geburtenrate gut durch die Westraten approximieren lassen, werden die Lee-Carter geschätzten Parameter für Ostdeutschland im Vergleich zu westdeutschen Raten dargestellt. Zunächst die Entwicklung der zeitspezifischen Überlebensraten  $k_t$  im Vergleich, zusammen mit den (linearen) Trendgeraden, die sich beim random walk mit drift - Modell ergeben.

### 4.4.1 Frauen

Zunächst werden die zeitspezifischen Überlebensraten für Frauen beider Landesteile vergleichend dargestellt:

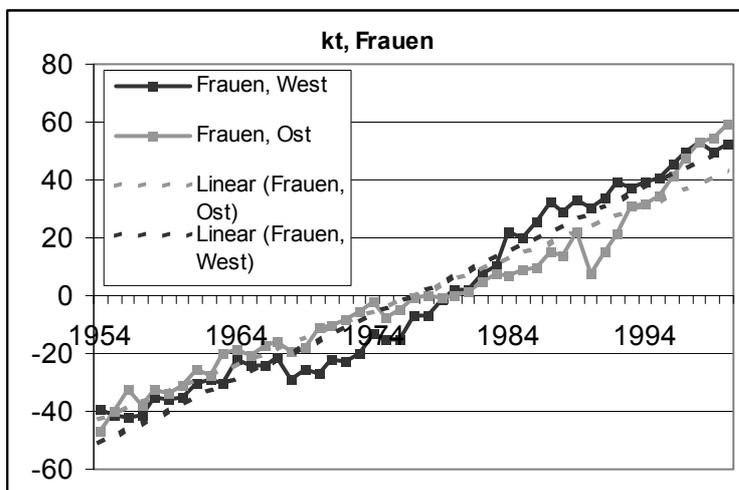


Abbildung 30: Zeitlicher Verlauf der  $k_t$  beim Lee-Carter-Modell, Frauen, West- und Ostdeutschland

Obwohl die zeitspezifische Überlebensrate ostdeutscher Frauen geringer ansteigt als die von westdeutschen Frauen, lassen sich seit der Wiedervereinigung eine generell starke Anpassung der Mortalitätsverhältnisse des Osten an den Westen beobachten. Insbesondere bei Frauen ist dieser Anpassungsprozess nahezu abgeschlossen. So lag im Jahr 2000 die Lebenserwartung ostdeutscher Mädchen bei Geburt nur noch 0,2 Jahre unterhalb derer westdeutscher Mädchen. Daher erscheint es angemessen, die zukünftige Mortalität in Ostdeutschland mit den Parametern des Westens zu modellieren.

Wendet man den Lee-Carter Algorithmus auf die ostdeutschen Daten an, stellt man bei den zeitinvarianten Parametern  $a_x$  und  $b_x$  eine weitgehende Übereinstimmung fest, wie aus Abbildung 31 hervorgeht. Der Parameter  $a_x$  bildet die altersspezifischen Überlebensverhältnisse ab, während  $b_x$  zeigt, in welchem Maße unterschiedliche Alterklassen zur Änderung des Mortalitätsindex im Mittel während des betrachteten Zeitraums beitragen.

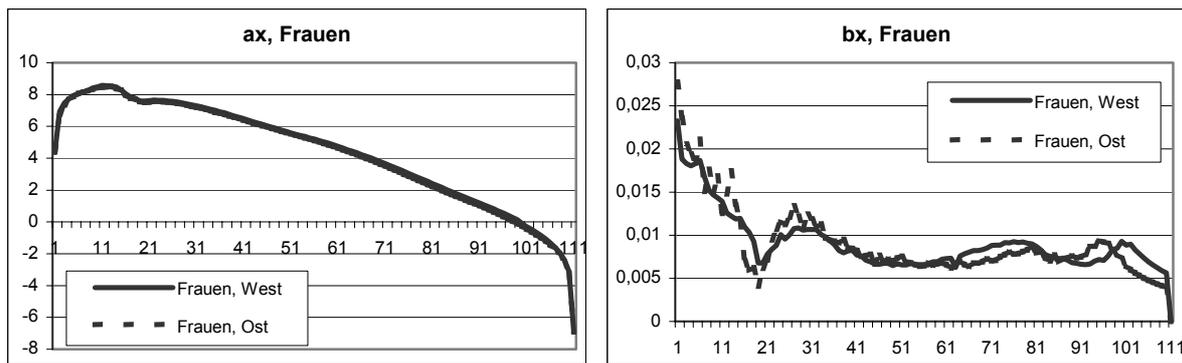


Abbildung 31: Altersspezifischer Verlauf der  $a_x$  und  $b_x$  beim Lee-Carter-Modell, Frauen, West- und Ostdeutschland

#### 4.4.2 Männer

Bei Männern sind die beiden zeitinvarianten Parameter ebenfalls ähnlich, bei  $b_x$  existieren bei sehr niedrigen und mittleren Altersgruppen Differenzen, die aber vernachlässigbar erscheinen. Interessant ist der Befund, dass der in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts beobachtete Gewinn an Lebenserwartung bei Männern im Westen in erheblich höherem Maße der geringeren Sterblichkeit bei mittelalten Personen (30-60 Jahre), im Osten bei Kindern und Jugendlichen zuzuschreiben ist. Aufgrund der Ähnlichkeit werden auch bei Männern in West- und Ostdeutsche dieselben (West-)  $a_x$  und  $b_x$  Parameterwerte verwendet.

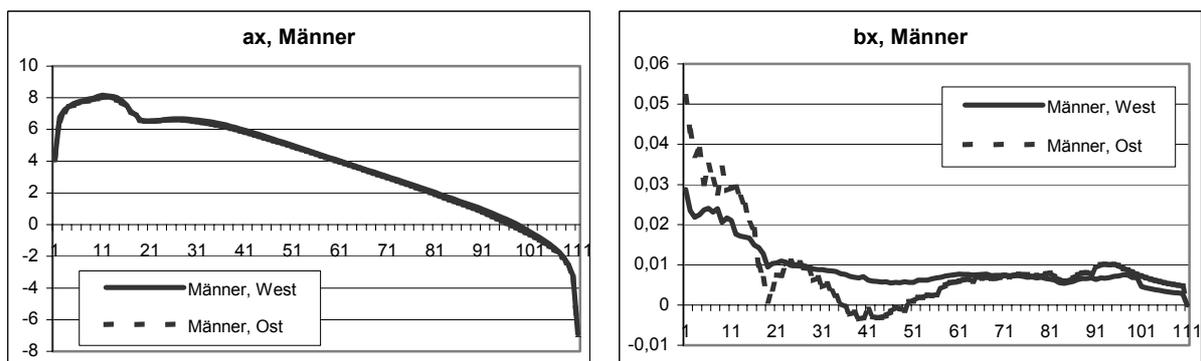


Abbildung 32: Altersspezifischer Verlauf der  $a_x$  und  $b_x$  beim Lee-Carter-Modell, Männer, West- und Ostdeutschland

Was die Lebenserwartung bei Geburt von Männern betrifft, so bestand im Jahr 2000 zwischen Ost und West noch die beachtliche Differenz von 1,6 Jahren, so dass wir noch nicht von einem abgeschlossenen Aufholprozess sprechen können. Die Fortschreibung der  $k_t$  des Ostens ist allerdings keine Alternative. Die Wiedervereinigung markiert einen Strukturbruch, der durch das Lee-Carter Modell nicht abgebildet werden kann. Abbildung 33 zeigt die Entwicklung der Lebenserwartung ostdeutscher Männer und die Rekonstruktion der LC geglätteten Mortalitätsraten. Bis zur Wiedervereinigung zeigt das Lee-Carter Modell eine gute Performance, den nach der Wiedervereinigung einsetzenden Aufholprozess kann es jedoch nicht abbilden. Vor diesem Hintergrund wurde entschieden, den ostdeutschen Mortalitätsindex logistisch gegen den westdeutschen Parameter konvergieren zu lassen. Auf diese Weise wird eine zügige Angleichung der Verhältnisse erreicht. Danach werden für ostdeutsche Männer wie bei den Frauen ebenfalls die prognostizierten Westwerte verwendet.

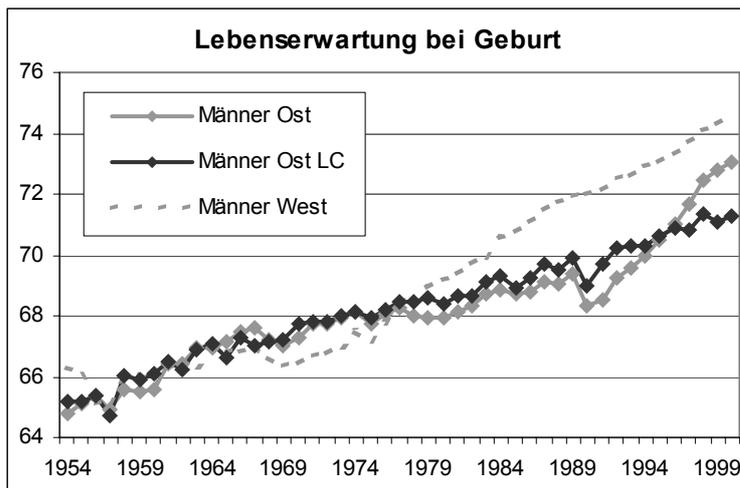


Abbildung 33: Lebenserwartung 1954-2000, tatsächliche Entwicklung vs. Rekonstruktion durch Lee-Carter Modell

## 4.5 Migration

Die Nettomigration wird ähnlich wie die TFR (random walk) modelliert, allerdings wird hier ein AR(1) (Autoregressives Modell mit einem lag) geschätzt. Das bedeutet, dass die folgende Gleichung 12 geschätzt wird:

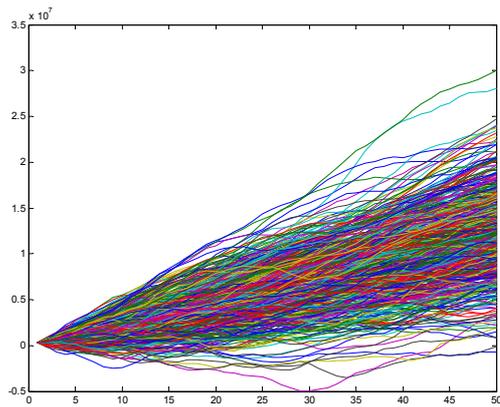
$$y_t = (1 - \theta)\mu + \theta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (12)$$

Die Parameter ergeben sich wie folgt:

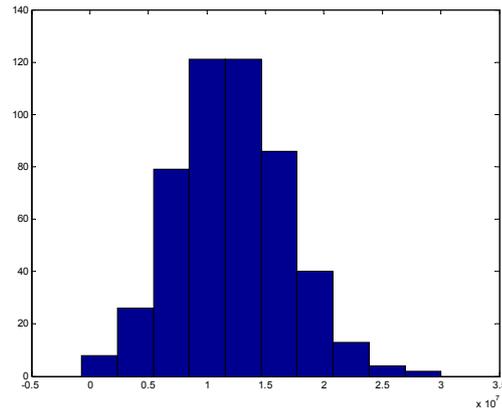
		Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
netto							
netto	_cons	244453	83299.9	2.93	0.003	81188.17	407717.8
ARMA							
ar	L1	.7182103	.0931731	7.71	0.000	.5355944	.9008262
	/sigma	158612.8	18704.72	8.48	0.000	121952.2	195273.4

Tabelle 3: Parameter und goodness of fit des AR(1) Modells für die Nettomigration, Deutschland

Nach 500 stochastischen Simulationen der Nettomigration resultieren die folgenden Trajektorien während der nächsten 50 Jahre. Die Verteilung der Anzahl der netto migrierten Bevölkerung im Jahre 2050 ergibt einen Mittelwert von etwa 11,8 Millionen, mit einer Standardabweichung von etwa 4,4 Millionen Personen.



Prognosejahr



Verteilung netto migr. Bev. (bis2050)

**Abbildung 34: Anzahl der netto migrierten Bevölkerung zwischen 2001 und 2050 (stochastisch, 500 Iterationen, Westdeutschland, Verteilung in 2050)**

Wie in Abbildung 34 rechts zu erkennen ist, beträgt auf Basis des vorliegenden Modells eine in 2050 die Anzahl der netto migrierten Personen zwischen etwa 5 Millionen und 20 Millionen.

#### **4.6 Sollten Zufallswerte für West- und Ostdeutschland gemeinsam verwendet werden ?**

Falls gemeinsame Parameter für die Prognose der weiteren Bevölkerungsentwicklung für West- und Ostdeutschland verwendet werden (wie etwa die Ähnlichkeit der  $a_x$  und  $b_x$  oben suggeriert) ist für die Generierung von Zufallswerten, die für die Entwicklung der Parameter genutzt werden, folgendes grundsätzlich zu überlegen:

Auf stochastischer Ebene impliziert eine getrennte Generierung der Zufallswerte für die Bevölkerungsentwicklung Ost- und Westdeutschlands, dass die entsprechenden Bevölkerungsparameter unkorreliert sind. So ist beispielsweise in 2020 eine TFR von 1,3 im Westen und 1,8 im Osten denkbar. Dies läuft aber einer möglichen Absicht entgegen, eine Anpassung des Osten an den Westen abzubilden. Gleiche Verhältnisse in Ost und West würden eine perfekte Korrelation der Bevölkerungsparameter implizieren. Lee (1998) vertritt die Auffassung, dass man sogar international von einer Korrelation der Prognosefehler ausgehen kann bzw. dass sie sorgfältig zu prüfen ist.

Grundsätzlich ist eine korrekte Spezifikation der Prognosefehler wichtig, um konsistente Prognoseintervalle zu erhalten. Eine Nullkorrelation der Parameter in Ost und West bedeutet, dass sich die Prognosefehler gegenseitig aufheben können. Dies ist bei einer perfekten Korrelation nicht der Fall. Liegt in der Tat perfekte Korrelation vor, werden die Konfidenzintervalle bei unabhängiger Simulation tendenziell zu eng ausfallen. Die Möglichkeit konsistente Prognoseintervalle zu konstruieren, ist jedoch einer der wichtigsten Gründe, die für eine stochastische Prognose auf Basis von Zeitreihenmethoden sprechen.

Falls Abhängigkeiten berücksichtigt werden sollen, könnte ein gesamtdeutscher Bevölkerungsparameter als das mit den Bevölkerungsanteilen gewichtete Mittel des jeweiligen west- und ostdeutschen Parameterwertes konstruiert werden.

Im vorliegenden Stadium des Projekts der stochastischen Bevölkerungsprognose werden die (gemeinsam verwendeten) Parameter  $a_x$  und  $b_x$  allerdings noch getrennt simuliert, ebenso wie die Parameter  $k_t$  sowie die Parameter der Geburtenrate.

Zudem wird in unserer stochastischen Prognose im ersten Ansatz für die Generation von Zufallswerten kein Zusammenhang zwischen

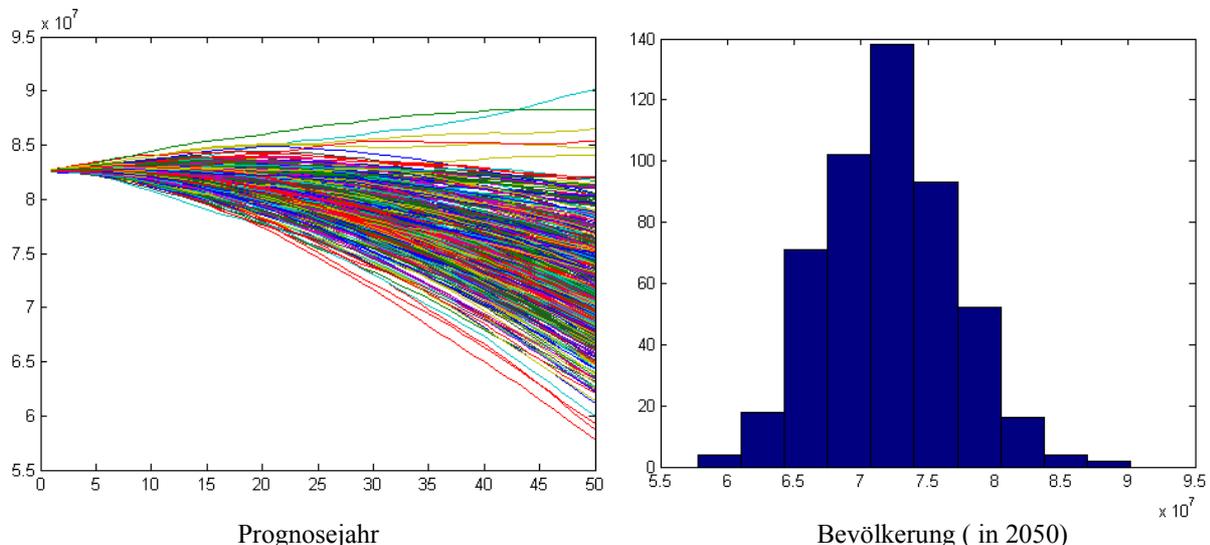
- einzelnen Komponenten (z.B.: Mortalität und Fertilität)<sup>8</sup>
- den Geschlechtern

angenommen. Eine Untersuchung von entsprechenden Zusammenhängen ist im weiteren Projektverlauf allerdings geplant.

## 5. Resultate der stochastischen Bevölkerungsschätzung

Ein erstes Resultat der Bevölkerungsschätzung betrifft die Gesamtbevölkerung in beiden Landesteilen. Das Statistische Bundesamt (2003) prognostiziert in der Variante „minimale Bevölkerungszahl“ in 2050 eine Bevölkerung von 67 Millionen, in der Variante „mittlere Bevölkerungszahl“ 75 Millionen und in der Variante „maximale Bevölkerungszahl“ 81,5 Millionen. Wie

Abbildung 35 zeigt, bewegt sich unsere Prognose mit im Mittel 72,1 Millionen Personen etwas unter der mittleren offiziellen Vorhersage. Mit einer Standardabweichung von 4,9 Millionen Personen liegt die Bandbreite der Vorhersage des Statistischen Bundesamts gerade im  $\sigma$ - (68%<sup>9</sup>-) Konfidenzintervall unserer Prognose.

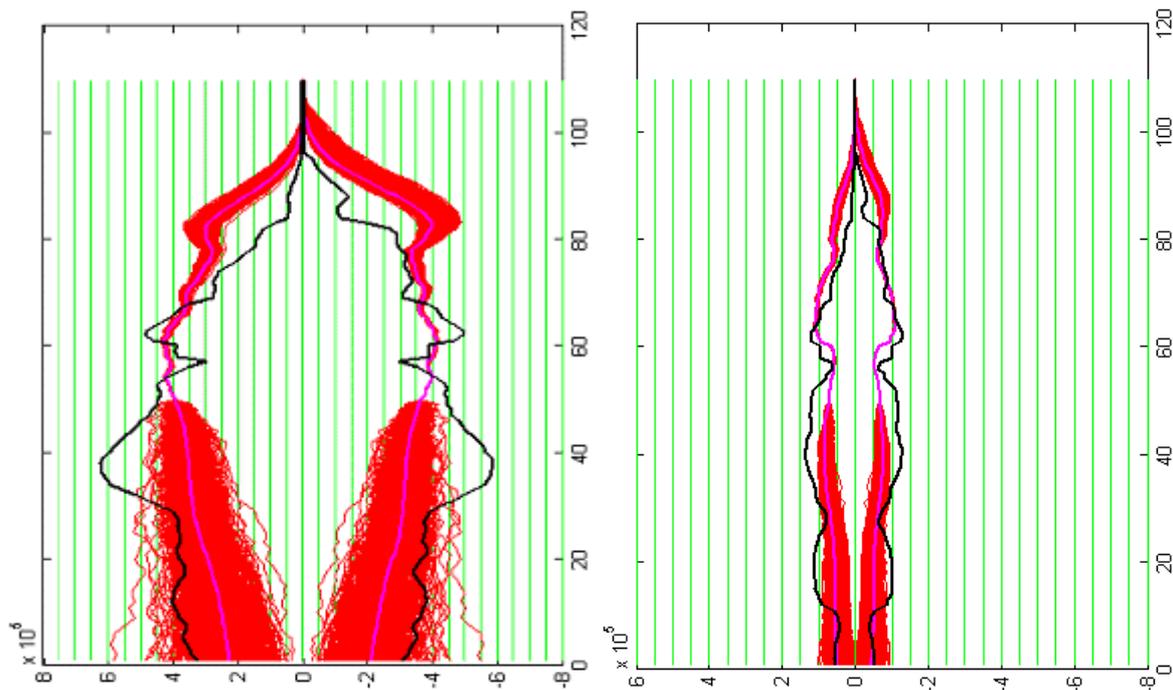


**Abbildung 35: Gesamtbevölkerung zwischen 2001 und 2050 (stochastisch), 500 Iterationen, Gesamtdeutschland, Verteilung in 2050**

Als Ergebnis der nach Alter, Geschlecht und West/Ost getrennten stochastischen Modellierung resultieren nach 500 Iterationen für 2050 die folgenden stochastischen Bevölkerungspyramiden. Zum Vergleich wird die Bevölkerung in 2000 (schwarz) sowie die sich bei deterministischer Modellierung ergebende Bevölkerung (pinkfarben) aufgeführt. Abbildung 36 (rot) zeigt die deutsche Bevölkerung als (stochastischen) Querschnitt in 2050, für West- (links) und Ostdeutschland (rechts).

<sup>8</sup> Diese Annahme ist für entwickelte Länder realistisch, vgl. Keilman und Hetland 2002.

<sup>9</sup> Dies gilt unter Annahme einer Normalverteilung die aber durch die Verteilung gut bestätigt wird.



**Abbildung 36: Bevölkerungspyramide 2000 und 2050: stochastisch (rot) und deterministisch (pinkfarben), 500 Iterationen, West (links)- und Ostdeutschland**

In Abbildung 36 kommt die mit einer Bevölkerungsprognose verbundene Unsicherheit zum Ausdruck. Die Konfidenzbänder an der Spitze der Pyramide resultieren aus der Unsicherheit bezüglich der zukünftigen Entwicklung der Lebenserwartung. Weiterhin wird deutlich, dass sich die Anzahl der Personen, die 2050 zwischen 50 und etwa 65 Jahre alt sein werden, mit großer Genauigkeit vorhersagen lässt. Am größten ist die Unsicherheit bei den Jahrgängen, die heute noch nicht geboren sind, was intuitiv einsichtig ist. Erstens ist die Fruchtbarkeit selbst stärkeren Schwankungen unterworfen als die Sterblichkeit. Zweitens ist bei einem Prognosezeitraum von 50 Jahren nicht nur die Anzahl der Kinder unsicher, sondern, da diese heranwachsen, auch die Anzahl potentieller Eltern einer weiteren Generation. Die Verjüngung der 2050er Bevölkerungspyramide ist besonders im Westen stark ausgeprägt, da zunächst noch relativ viele Kinder von den letzten Jahrgängen der Babyboomer geboren werden, bevor die absolute Geburtenzahl kontinuierlich absinkt.

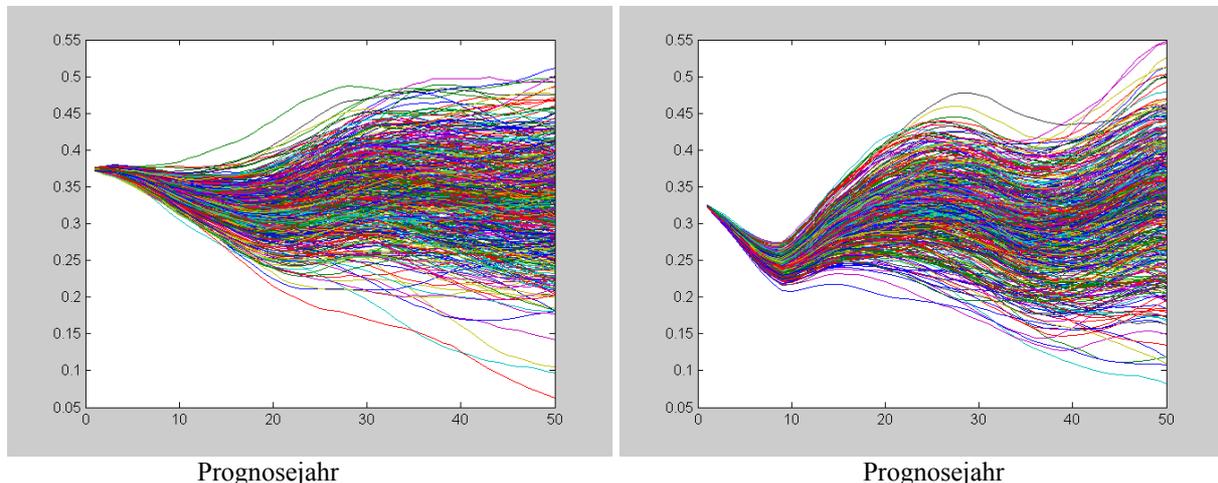
Schließlich scheint der Begriff der Bevölkerungspyramide in der Mitte des 21. Jahrhunderts überholt, da die Kohorte der dann 80-jährigen Frauen vermutlich die stärkste Bevölkerungsgruppe sein wird. So erscheint es angemessener, von einem „Bevölkerungskegel“ zu sprechen.

## **5.1 Entwicklung des Jugendlastquotienten**

Um eine Abschätzung der zukünftig zu erwartenden finanziellen Belastungen der potentiell arbeitenden Bevölkerung durch Transfers zur nichterwerbstätigen Bevölkerung stochastisch abschätzen zu können, wird die Entwicklung der „totalen Abhängigkeitsrate“ („total dependency ratio“) untersucht. Diese ist das Verhältnis der potentiell erwerbstätigen Bevölkerung (20-59 Jährige) zur „abhängigen“ Bevölkerung (unter 20- und über 59 Jährige).

Die totale Abhängigkeitsrate wird unterteilt in den „Jugendlastquotienten“ (Youth dependency ratio) und den „Alterslastquotienten“ (Old age dependency ratio). Letzterer gilt in Ländern mit einer ausgeprägten umlagefinanzierten Altersrente wie in Deutschland als wichtigstes Maß für die finanzielle Belastung der (potentiell) erwerbstätigen Bevölkerung.

Zunächst wird die Entwicklung des Jugendlastquotienten illustriert:

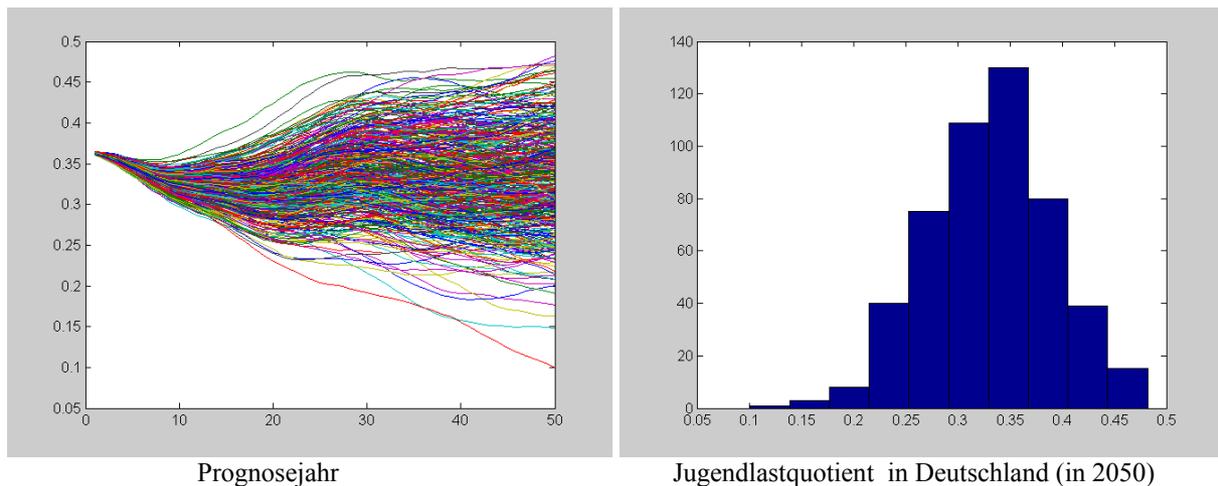


**Abbildung 37: Entwicklung des „Jugendlastquotienten“ (Youth dependency ratio)  $((pop0_{19}) / (pop20_{59}))$ , 500 Iterationen, West (links)- und Ostdeutschland**

Der Jugendlastquotient nimmt zunächst aufgrund des Rückgangs der gebärfähigen Frauen verbunden mit der geringen Geburtenraten in West und Ost ab, entwickelt sich danach in beiden Landesteilen allerdings unterschiedlich. Im Westen steigt dieser Wert während des Renteneintritts der Babyboomergeneration ab etwa 2020 kontinuierlich an, bevor er ab etwa 2035 wieder leicht fällt. Die (relative) Bandbreite steigt stetig an. Es ergibt sich am Ende des Simulationszeitraums für den Jugendlastquotienten im Westen ein Mittelwert von 0,33 mit einer Standardabweichung von 0,07.

Im Osten steigt der Jugendlastquotient schon nach 2010 wieder an, da dann die relativ geburtenstarken Jahrgänge Mitte bis Ende der 1980er Jahre ins (nennenswert) gebärende Alter kommen. In den 20er Jahren ergibt sich aufgrund der niedrigen Geburtenraten in den 1990er Jahren wieder ein Fallen dieser Rate, bevor sie in den späten 30er Jahren aufgrund der relativ starken Jahrgänge Mitte bis Ende der 1980er Jahre wieder ansteigt. Am Ende des Simulationszeitraums resultiert für den Jugendlastquotienten ein Mittelwert um 0,33 (Standardabweichung 0,08).

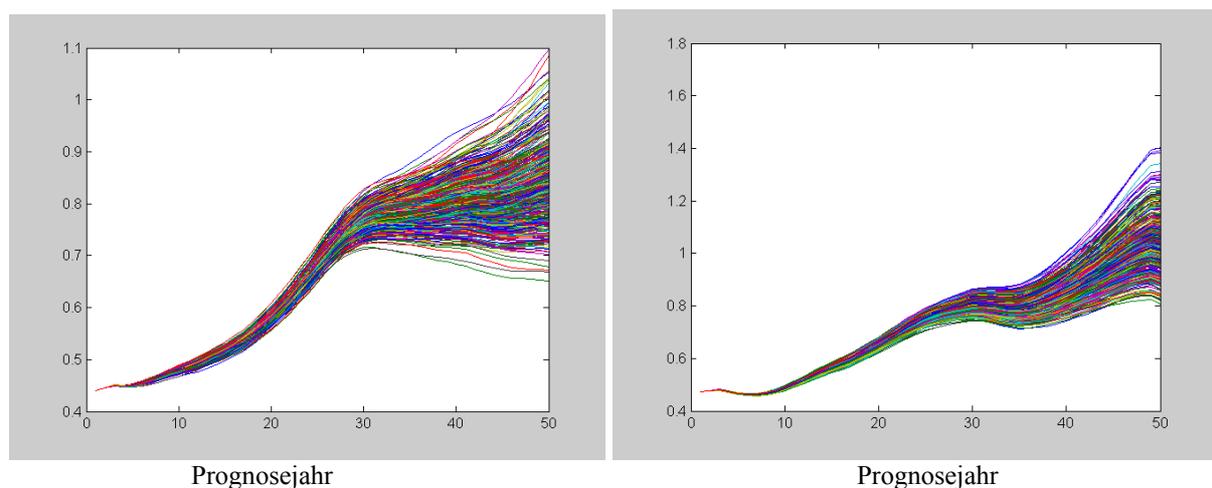
Für Gesamtdeutschland resultiert ein Mittelwert des stochastischen Jugendlastquotienten von 0,33, was leicht unter der mittleren Variante des Statistischen Bundesamts von 0,34 in 2050 liegt. Bei einer Standardabweichung von 0,06 liegt der offizielle Wert nahe dem Mittelwert der stochastischen Prognose.



**Abbildung 38: Jugendlastquotient zwischen 2001 und 2050 (stochastisch), 500 Iterationen, Gesamtdeutschland, Verteilung in 2050**

## 5.2 Entwicklung des Alterslastquotienten

Beim Alterslastquotienten ergibt die stochastische Prognose folgenden Verlauf:



**Abbildung 39: Entwicklung des „Alterslastquotienten“ (Old age dependency ratio) ( $\text{pop}_{60+} / \text{pop}_{20\_59}$ ), 2001-2050 stochastisch, 500 Iterationen, West (links)- und Ostdeutschland**

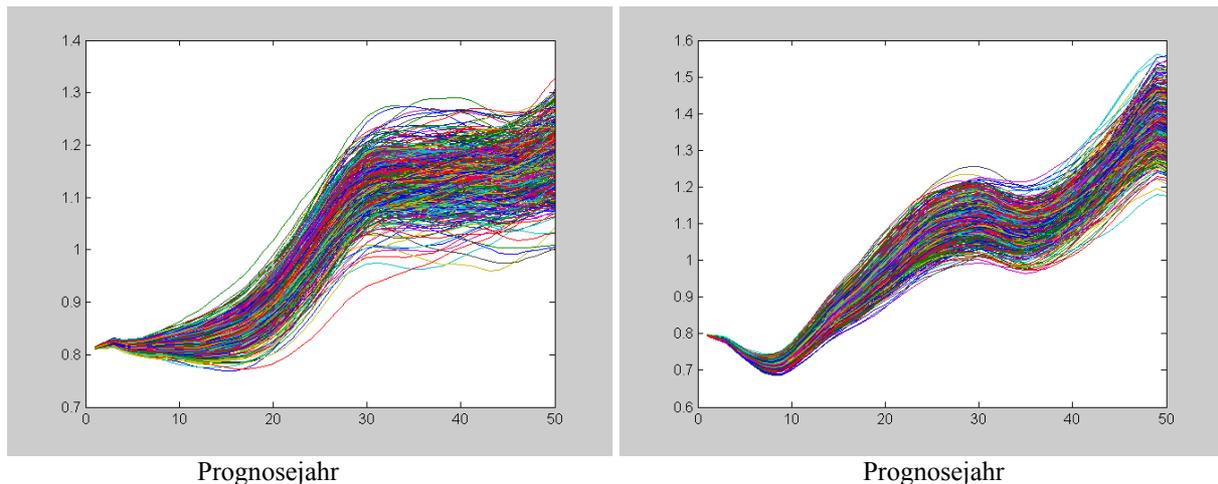
Die Bandbreiten der Alterslastquotienten sind aufgrund der erheblich höheren Unsicherheiten bei der Prognose der Geburtenraten deutlich geringer als beim Jugendlastquotienten. Seine Entwicklung verläuft in West- und Ostdeutschland ähnlicher als die des Jugendlastquotienten. Während im Westen eine stetige Verschärfung – besonders zwischen 2010 und 2030 - eintritt, gibt es im Osten zunächst ein leichte Entspannung, bevor der Quotient aber steil ansteigt. Die Bandbreite des Alterslastquotienten ist im Osten höher, das Niveau am Ende des Simulationszeitraums ebenfalls. Der Mittelwert beträgt im Jahr 2050 im Osten 1,03, im Westen 0,84, bei einer Standardabweichung im Osten von 0,103, im Westen von 0,074.

Unsere stochastische Prognose ergibt in 2050 für Gesamtdeutschland einen Mittelwert von 0,87 bei einer Standardabweichung von 0,06. Dieser im Verhältnis zu den Einzelschätzungen relativ geringe Wert zeigt, dass sich Prognosefehler der beiden Landesteile bei einer aggregierten Schätzung zu einem Teil aufheben.

Schätzungen des Statistischen Bundesamts (2003) prognostizieren in der mittleren Variante einen gesamtdeutschen Alterslastquotienten von 0,78 in 2050. was deutlich unter dem hier vorgestellten Mittelwert liegt. Erst die Variante „Relativ alte Bevölkerung , V7“ ergibt einen Alterslastquotienten von 0,88 (S. 34).

### 5.3 Entwicklung der Totalen Abhängigkeitsrate

Schließlich die Entwicklung der „totalen Abhängigkeitsrate“ als Summe von Jugendlastquotient und Alterslastquotient:



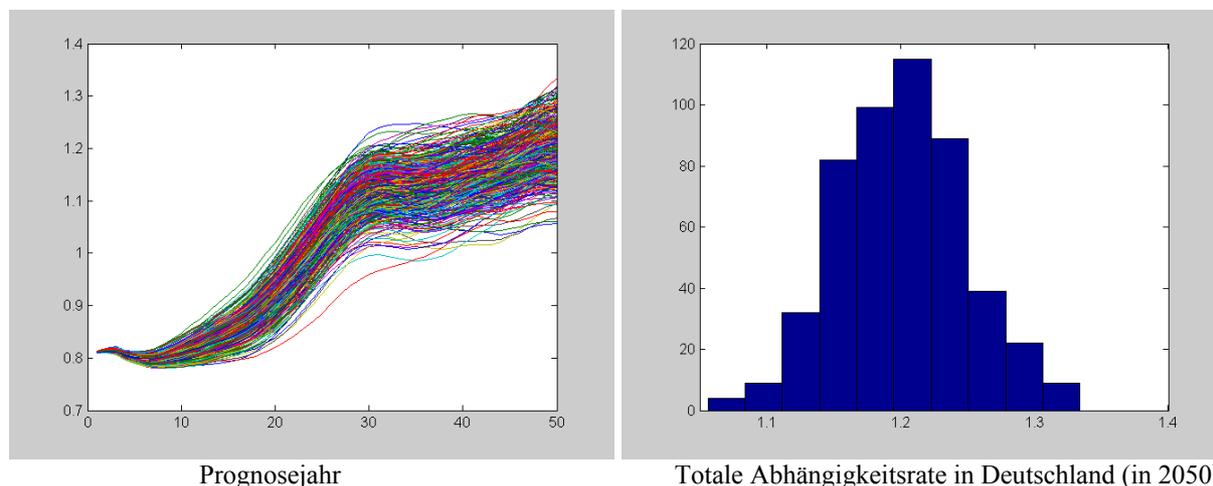
**Abbildung 40: Entwicklung der „totalen Abhängigkeitsrate“  $((pop0_{19} + pop60+) / (pop20_{59}))$ , 2001-2050 stochastisch, 500 Iterationen, West (links)- und Ostdeutschland**

Der qualitative Verlauf der totalen Abhängigkeitsrate ist dem Alterslastquotienten sehr ähnlich. Man erkennt deutlich, dass sich die Situation in Ostdeutschland aufgrund der relativ hohen Zahl von kurz vor der Wende geborenen zunächst entspannt (bis 2010), danach bis 2030 verschärft, um dann das Westniveau zu erreichen. Dann setzt wieder eine leichte „Erholung“ ein, bevor wieder ein starker Anstieg erfolgt, der sich erst in 2050 deutlich über Westniveau wieder umkehrt. Im Westen erfolgt bis 2015 eine leichte Steigerung der Abhängigkeitsrate, um danach steil anzusteigen und etwa in 2030 auf relativ hohem Niveau zu stagnieren. Da die Babyboomergeneration danach weitgehend gestorben sein wird, erfolgt nach 2040 nur noch eine geringfügige Steigerung. Der Mittelwert beträgt in 2050 in Ostdeutschland 1,37, in Westdeutschland 1,17, bei einer Standardabweichung im Osten von 0,067 und im Westen von 0,055. Sowohl Niveau als auch Unsicherheitsbereich der totalen Abhängigkeitsrate liegen in Ostdeutschland längerfristig höher als in Westdeutschland.

Auf Gesamtdeutschland bezogen liegt der Mittelwert der simulierten totalen Abhängigkeitsrate in 2050 bei 1,21 bei einer Standardabweichung von 0,049. Das Statistische Bundesamt prognostiziert die folgenden totalen Abhängigkeitsraten in Abhängigkeit der unterstellten Szenarien. Aufgrund der Vergleichbarkeit mit unseren stochastischen Resultaten werden nur die Abhängigkeitsraten dargestellt, denen das „mittlere Wanderungssaldo“ (200.000 Personen pro Jahr) zugrunde liegt:

Variante	Annahmen Lebenserwartung	Annahmen Wanderungssaldo	Totale Abhängigkeitsrate (0-19 und 60+ Jährige / 20-59 Jährige) in 2050
2	niedrig	mittel (> 200 000)	1,09
5	mittel	mittel (> 200 000)	1,12
8	hoch	mittel (> 200 000)	1,15

**Tabelle 4: Szenarien des Statistischen Bundesamts mit korrespondierenden totalen Abhängigkeitsraten.**



**Abbildung 41: Entwicklung der „totalen Abhängigkeitsrate“, 2001 und 2050 stochastisch, 500 Iterationen, Gesamtdeutschland, Verteilung in 2050**

Lediglich die aus dem Szenario „hohe Lebenserwartung“ resultierende totale Abhängigkeitsrate liegt im  $2\sigma$ -Vertrauensbereich der stochastischen Prognose. Damit können bei struktureller Konstanz der Bevölkerungsdaten die anderen beiden Ergebnisse als extrem unwahrscheinlich betrachtet werden. Um etwa das mittlere Szenario zu erreichen, muss also ein struktureller Wandel des Geburten- und Sterbeverhaltens erfolgen. Von einem solchen Wandel wird von offizieller Seite aber nicht ausgegangen.

## 6. Ausblick

In diesem Papier wird die üblicherweise deterministische Prognose der Bevölkerung (Statistisches Bundesamt 2003) auf eine stochastische Form erweitert, die es ermöglicht, Unsicherheiten der Prognose zu modellieren. Dabei resultieren nicht Aussagen wie „im Jahr 2030 wird es in der Variante x 1000 weibliche Personen des Alters y geben“, sondern „im Jahr 2030 wird die Anzahl der weiblichen Personen des Alters y mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% zwischen 850 und 1100 liegen.“ Das bedeutet, dass nicht Punktprognosen für eine bestimmte Bevölkerungsgruppe, sondern ganze Verteilungen modelliert werden.

Die hier vorgestellten Ergebnisse betreffen noch schwerpunktmäßig die stochastische Prognose der Bevölkerung<sup>10</sup>. Als eine Anwendung wird die potentielle Erwerbstätigkeit näherungsweise noch in Form des Verhältnisses „abhängiger“ Personen unter 20 und/oder über 59 Jahren zu mittelalten Personen (potentielle Erwerbspersonen) zwischen 20 und 59 Jahren stochastisch prognostiziert. Mit Hilfe valider Prognosen von Erwerbstätigenquoten auf Basis bereits durchgeführter (deterministischer) Berechnungen (Börsch-Supan 2003) ist

<sup>10</sup> Eine Aktualisierung der hier vorgestellten Ergebnisse mit neueren Ausgangsdaten (Statistisches Jahrbuch 2004) mit Bevölkerungsdaten vom 1.1.2003 wird bei Verfügbarkeit erfolgen.

geplant, die Unsicherheit der Erwerbstätigkeit aufgrund der Unsicherheit der Bevölkerung genauer abzuschätzen.

Da eine stochastische Erwerbstätigenprognose jedoch besonderen Schwierigkeiten unterliegt, sind entsprechende Resultate lediglich ein Anhaltspunkt. Die Prognose zukünftiger Erwerbstätigen- und Arbeitslosenzahlen wird unter anderem durch die Unsicherheit der konjunkturellen Entwicklung erschwert. Selbst wenn bei der Schätzung von Konjunkturschwankungen abgesehen wird, ist es notwendig, Annahmen über die Entwicklung der strukturellen Rahmenbedingungen zu treffen. Häufig wird ein konjunkturneutrales, strukturelles Niveau der Arbeitslosigkeit angenommen, das an anderer Stelle beispielsweise mit etwa 8 % beziffert wird (Börsch-Supan 2003). Ferner erscheint die Unterscheidung zwischen sozialversicherungspflichtigen und geringfügig Beschäftigten durch regelmäßige Definitionsänderungen in der Gesetzgebung problematisch. Diese aber wäre etwa für Untersuchungen der zukünftigen Finanzierbarkeit der gesetzlichen Rentenversicherung essentiell.

Im Zuge der anstehenden Rentenreformen in Deutschland und anderen Ländern Europas werden derzeit Auswirkungen verschiedener Maßnahmen mit der Zielsetzung einer höheren Erwerbstätigkeitsquote geprüft. Dazu gehören eine veränderte Rentenzugangsregelung mit einer veränderten Gesetzgebung im Bereich der Frühverrentungsmöglichkeiten und eine Erhöhung des Renteneintrittsalters, aber auch eine Attraktivierung einer höheren Erwerbstätigkeit von Frauen. Eine stochastische Modellierung der Auswirkungen solcher Maßnahmen sollen im Anschluss an das vorliegende Papier durchgeführt werden.

Prinzipiell sind im Zuge des demographischen Wandels stochastische Prognosen aller Nachfragegüter interessant, die eine starke alters- und/oder geschlechtsspezifische Diskriminierung aufweisen, z.B. Konsumgüter oder langlebige Gebrauchsgüter wie Immobilien oder Pkw. Hierfür sind – auch wenn man sich nur auf demographische Effekte kapriziert - neben dem reinen Alterungseffekt zudem auch Strukturveränderungen der Wohnbevölkerung wie etwa eine veränderte Haushaltsgröße sowie eine veränderte Flächennutzung zu berücksichtigen.

## Literatur

- BERKEL, B. und BÖRSCH-SUPAN, A. 2003, Pension Reform in Germany: The Impact on Retirement Decisions. In: mea discussion papers, 36-03 (<http://www.mea.uni-mannheim.de/>)
- BERTELSMANN STIFTUNG, HRSG. 2003, Internationaler Reformmonitor, Ausgabe 8, Gütersloh, [http://www.reformmonitor.org/downloads/brochure/refmon\\_8d.pdf](http://www.reformmonitor.org/downloads/brochure/refmon_8d.pdf)
- BÖRSCH-SUPAN, A. 2003, Labor Market effects of Population Aging. In: Labour, 17 (Special Issue), 5-44
- BONGAARTS, J. und FEENEY, G. 1998, "On the Quantum und Tempo of Fertility," In: Population and Development Review, 24 (2), 271-291
- GUSTAFFSSON, S. 2001, "Optimal age at motherhood. Theoretical and empirical considerations on postponement of maternity in Europe," In: Journal of Population Economics 14, 225-247
- HAJNAL, L. 1947, "The Analysis of birth statistics in the light of the recent international recovery of the birth rate," In: Population Studies 1 (2), 137-164

- HECKMAN, J. und WALKER, J. 1990, "The Relationship between Wages and Income and the Timing and Spacing of Births: Evidence from Swedish Longitudinal Data", In: *Econometrica* 58 (6), 1411-1441
- KEILMAN, N., PHAM, D. und HETLAND, A. 2002, "Why population forecasts should be probabilistic – illustrated by the case of Norway", In: *Demographic Research* 6, Article 15
- KEYFITZ, N. 1981, "The limits of populations forecasting," In: *Population and Development Review* 7 (4), 579-593
- KOHLER, H-P., BILLARI, F. und ORTEGA, J. 2002, "The Emergence of Lowest-Low Fertility in Europe During the 1990s," In: *Population and Development Review* 28 (4), 641-680
- KOMMISSION ZUR NACHHALTIGKEIT IN DER FINANZIERUNG DER SOZIALEN SICHERUNGSSYSTEME 2003, Bericht der Kommission, Bundesministerium für Gesundheit und soziale Sicherung, Berlin
- KREYENFELD, M. 2003, "Crisis or Adaptation – Reconsidered: A Comparison of East and West German Fertility Patterns in the First Six Years after the 'Wende'" In: *European Journal of Population* 19: 303-329, 2003
- LECHNER, M. 2001, "The Empirical Analysis of East German Fertility after Unification: An Update" In: *European Journal of Population* 17, 61-74
- LEE, R. 1993, "Modelling and forecasting the time series of US fertility: Age patterns, range and ultimate level," In: *International Journal of Forecasting* 9, 187-202
- LEE, R. 1998, "Probabilistic Approaches to Population Forecasting", In: *Population and Development Review* 24, Issue Supplement: *Frontiers of Population Forecasting*, 156 - 190
- LEE R. und CARTER, L. 1992, "Modelling and forecasting the time series of US mortality," In: *Journal of the American Statistical Association* 87 (419), 659-671
- LEE R. und TULJAPURKAR, S. 1994, "Stochastic population projections for the United States: Beyond high, medium and low," In: *Journal of the American Statistical Association* 89 (428), 1175-1189
- LESLIE, P. H. 1945, "On the use of Matrices in Certain Population Mathematics", In: *Biometrika* 33 (3), 183-212
- LUTZ, W.; SANDERSON, W., und SCHERBOV, S. 1996, "Probabilistic population projections based on expert opinion" in W. Lutz (Hrsg.), *The future population of the world: What can we assume today?* London: earthscan
- LUTZ, W. und SCHERBOV, S. 1998, "Probabilistische Bevölkerungsprognose für Deutschland", In: *Zeitschrift für Bevölkerungswissenschaft*, Jg. 23 2/1998, 83-109
- PEDROZA, C. 2002, *Revisiting Demographic Methods*, <http://www.cbrss.harvard.edu/programs/hsecurity/papers/june/Pedroza.pdf>
- STATISTISCHES BUNDESAMT (2003), 10. koordinierte Bevölkerungsvorausberechnung bis 2050, [http://www.destatis.de/presse/deutsch/pk/2003/Bevoelkerung\\_2050.pdf](http://www.destatis.de/presse/deutsch/pk/2003/Bevoelkerung_2050.pdf), Wiesbaden
- STATISTISCHES BUNDESAMT (2001), *Wanderungsstatistik*, <http://www-zr.destatis.de/dok/sgu3026.htm>
- STOTO, M. 1983, "The accuracy of population projections," In: *Journal of the American Statistical Association* 78, 13-20
- UNITED NATIONS 2002, *World Population Prospects: The 2002 Revision and World Urbanization Prospects: The 2001 Revision*, <http://esa.un.org/unpp>

## Discussion Paper Series

Mannheim Research Institute for the Economics of Aging Universität Mannheim

**To order copies, please direct your request to the author of the title in question.**

<b>Nr.</b>	<b>Autoren</b>	<b>Titel</b>	<b>Jahr</b>
28-03	Axel Börsch-Supan, Alexander Ludwig, Joachim Winter	Aging, pension reform, and capital flows: A multi-country simulation model	03
29-03	H.-M. von Gaudecker Carsten Weber	Surprises in a Growing Market Niche: An Analysis of the German Private Annuities Market	03
30-03	Axel Börsch-Supan, Anette Reil-Held, Christina B. Wilke	Der Nachhaltigkeitsfaktor und andere Formelmodifikationen zur langfristigen Stabilisierung des Beitragssatzes zur GRV	03
31-03	Barbara Berkel Axel Börsch-Supan	Renteneintrittsentscheidungen in Deutschland: Langfristige Auswirkungen verschiedener Reformoptionen	03
32-03	Axel Börsch-Supan, Hendrik Jürges, Oliver Lipps	SHARE: Building a Panel on Health, Aging and Retirement in Europe	03
33-03	Florian Heiss	Wie groß soll die Schwankungsreserve der gesetzlichen Rentenversicherung sein?	03
34-03	Axel Börsch-Supan, Christina B. Wilke	The German Public Pension System: How it Was, How it Will Be	03
35-03	Lothar Essig, Anette Reil-Held	Chancen und Risiken der „Riester-Rente“	03
36-03	Barbara Berkel Axel Börsch-Supan	Pension Reform in Germany: The Impact on Retirement Decisions	03
37-03	Axel Börsch-Supan, Anette Reil-Held and Christina Benita Wilke	How to make a Defined Benefit System Sustainable: The “Sustainability Factor” in the German Benefit Indexation Formula	03
38-03	Melanie Lührmann	Demographic Change, Foresight and International Capital Flows	03
39-03	Joachim Winter and Lothar Essig	Item nonresponse to financial questions in household surveys: An experimental study of interviewer and mode effects	03
40-03	Christoph Buchheim	Das Zusammenspiel von Wirtschaft, Bevölkerung und Wohlstand aus historischer Sicht	03
41-03	Oliver Lipps und Frank Betz	Stochastische Bevölkerungsprognose für West- und Ostdeutschland	03